



**Facultad
de
Ciencias**

Homología. Desde sus fundamentos hasta el análisis topológico de datos

*Homology. From its foundation to topological data
analysis*

**Trabajo Fin de Grado para acceder al
Grado en Matemáticas**

Autor: Pablo E. Bustamante Vega

Director: Francisco Santos Leal

Junio 2020

*Dedicado a aquellos
que me acompañan*

Resumen

El análisis topológico de datos es una disciplina formada por el conjunto de técnicas topológicas que se pueden utilizar para abstraer o extraer información de un conjunto grande de datos. El método que se expone en este trabajo es el de la homología persistente, método que estudia cómo evolucionan los grupos de homología de una filtración. Los fundamentos teóricos de esta disciplina están basados principalmente en la homología, por lo que ésta será nuestro principal objeto de estudio en este trabajo. Vamos a hablar de tres tipos de homología: simplicial, singular y celular; y probaremos diversas propiedades de cada tipo para ver que, en los casos en que las tres se pueden aplicar, las tres teorías de homología son en realidad la misma. También hablaremos de teoría de Morse, ya que es el nexo que une, en cierto contexto, la homología con la homología persistente. Para terminar, se formalizarán los conceptos básicos de homología persistente y se dará una intuición de cómo se trabaja con esos conceptos en casos más generales.

Palabras clave: homología simplicial, homología singular, homología celular, teoría de Morse, homología persistente.

Abstract

Topological data analysis is a subject consisting of the set of topological procedures that can be used to infer topological features from a big data set. The procedure showed in this bachelor thesis is persistent homology. This method studies the evolution of the homology groups of a filtration. The theoretical foundations of this subject come mainly from homology theory, and for this reason homology theory will be our main focus throughout this bachelor thesis. We will study three kinds of homology: simplicial, singular and cellular; and we will proof diverse properties of each type, such as the isomorphism among those three for spaces where the three can be defined. We will also study some Morse theory because it serves as a nexus between homology and persistent homology, in a certain context. Last but not least, we will formalise the basic concepts of persistent homology and we will give a general idea of how these concepts work in some contexts.

Key words: simplicial homology, singular homology, cellular homology, Morse theory, persistent homology.

Índice general

Introducción	1
1. Homología simplicial	3
1.1. Complejos simpliciales	3
1.2. Homología simplicial	7
2. Homología singular	11
2.1. Definición y primeras propiedades	11
2.2. Sucesiones exactas	15
2.3. Teorema de Excisión. Isomorfismo.	19
2.4. Homología con coeficientes	26
3. Homología celular	31
3.1. CW complejos	31
3.2. Definición, isomorfismo y cálculo	32
3.3. Ejemplos	36
4. Teoría de Morse	37
4.1. Trabajo previo de geometría diferencial	37
4.2. Teoría de Morse	39
5. Homología persistente	43
5.1. Primeros conceptos	43
5.2. Estabilidad	46
5.3. Aplicaciones	49

Introducción

J. H. Poincaré introdujo originalmente los primeros conceptos de homología en 1895. Usando las nociones de complejo simplicial y número de incidencia, definió los números de Betti y los números de torsión. Esto supuso el origen de la topología algebraica, disciplina que estudia formas de asignar a cada espacio topológico una estructura algebraica que refleje propiedades intrínsecas de este. Sin embargo, no fue hasta los años 1925-1935 que, por la influencia de E. Noether, se pasó a estudiar los grupos de homología, en vez de los invariantes numéricos que los caracterizan. La formalización de la homología tal y como se la conoce hoy en día se atribuye a S. Eilenberg y N. Steenrod en 1952.

Por otra parte, el análisis topológico de datos es una disciplina relativamente reciente, en comparación con la homología. Sus aplicaciones en la denominada 'Era de la Información' son amplias, desde análisis de imágenes a estudiar la estructura de secuencias de ADN. La homología persistente, uno de los focos de este trabajo de fin de grado, es considerada por algunos como el buque insignia del análisis topológico de datos.

El objetivo de este trabajo es establecer un camino elemental y directo desde los fundamentos de la homología, que se basan en conceptos de topología general y de teoría de grupos, hasta la homología persistente.

En el Capítulo 1 hablaremos de complejos simpliciales y homología simplicial. Por su utilidad en la homología persistente, contaremos algunos métodos para construir complejos simpliciales a partir de nubes de puntos.

Es en el Capítulo 2 donde desarrollaremos más artillería teórica; aquí vamos a profundizar en la homología singular. También hablaremos de homología con coeficientes en grupos arbitrarios, ya que en la práctica se usa homología con coeficientes en \mathbb{F}_2 , por sus especiales propiedades al ser cuerpo. Para este propósito se estudiarán conceptos puramente algebraicos: las sucesiones exactas y el producto tensorial. Los resultados principales que se probarán son: la homología singular es un invariante homotópico, la existencia de un isomorfismo entre la homología singular y la simplicial y el Teorema de Excisión.

Haremos una parada en el Capítulo 3 para estudiar la homología celular. Se probará el isomorfismo canónico entre la homología celular y la singular; además estudiaremos algo de teoría del grado para calcular grupos de homología celular. Con esto podremos calcular, sin demasiado esfuerzo, los grupos de homología de varios espacios topológicos interesantes.

El Capítulo 4 se sale algo de la tónica previa del trabajo, ya que versa sobre teoría de Morse. La elección de este tema para este trabajo se debe a que no es complicado probar que la homología persistente funciona bien en el contexto de la teoría de Morse. Probaremos dos resultados clásicos que se complementan: el tipo de homotopía de las hipersuperficies de nivel de una función de Morse no cambia si no se pasa por un punto crítico y sí cambia al pasar por uno.

Para terminar, en el Capítulo 5 se formalizarán los conceptos básicos de persistencia; así como se probarán resultados básicos de la estabilidad del diagrama de persistencia. Además se dará alguna idea de cómo ha ido evolucionando este método desde su aparición a principios del siglo XXI.

Capítulo 1

Homología simplicial

La idea tras la homología es buscar una forma de "contar agujeros de distintas dimensiones", de tal suerte que un agujero de dimensión 1 sea un espacio "encerrado" por una curva, por ejemplo una circunferencia; un agujero de dimensión 2 un espacio "encerrado" por una superficie, por ejemplo una esfera; siendo este procedimiento fácilmente generalizable a una dimensión arbitraria. La homología simplicial trata de hacerlo aproximando el espacio a estudiar por espacios más sencillos: los complejos simpliciales. Es por esto que empezamos estudiándolos. Los contenidos de este capítulo, salvo que se indique lo contrario, se han sacado del Capítulo 1 de [15], pág. 2-70.

1.1. Complejos simpliciales

Una idea muy antigua en la geometría es la de descomponer un polígono en triángulos. Un complejo simplicial es una construcción que busca generalizar esa idea a politopos de dimensión arbitraria. Esto se puede hacer cuando no hay ningún subespacio de codimensión 1 que contenga a todos sus vértices. Volviendo al caso de polígonos en el plano, sería como intentar dividir en triángulos un polígono tal que todos sus vértices estuvieran en una recta; claramente esto no tendría ningún sentido. De ahí la relevancia del siguiente concepto, pediremos que nuestros puntos sean *afínmente independientes*.

Definición 1.1.1. Sea $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^N , se dice que es un conjunto de puntos **afínmente independientes** si se cumple que

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0 \text{ y } \sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$$

implica $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$, donde t_i son escalares en \mathbb{R} .

Es fácil ver que esto es equivalente a que los vectores de la forma $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ sean linealmente independientes.

Proposición 1.1.2. Una familia de puntos $\{a_0, \dots, a_n\}$ es afínmente independiente si y sólo si los vectores $a_1 - a_0, \dots, a_n - a_0$ son linealmente independientes.

Demostración. Supongamos que los puntos son afínmente independientes. Supongamos que existen t_i tales que $\sum_i t_i(a_i - a_0) = 0$, veamos que $t_i = 0$ para todo i . Si tomamos $t_0 = \sum_i -t_i$, tenemos que $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ y $\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$, por lo que $t_i = 0$ para todo i . Para ver la otra implicación, supongamos que existen t_i tales que $\sum_i t_i = 0$ y $\sum_i t_i a_i = 0$. Tenemos que $t_0 = \sum_{i=1}^n -t_i$, sustituyendo en la otra ecuación nos da que $\sum_{i=1}^n -t_i a_0 + \sum_{i=1}^n t_i a_i = \sum_i t_i(a_i - a_0) = 0$, como estamos suponiendo que los vectores son linealmente independientes tenemos que $t_i = 0$ para todo $i \geq 1$ y por ser $t_0 = \sum_{i=1}^n t_i$, tenemos lo que queríamos. \square

Ahora que sabemos generalizar la idea de que los vértices del politopo no estén alineados, vamos a generalizar la idea de que un politopo convexo queda determinado por sus vértices; de la misma manera que un polígono convexo queda determinado por sus vértices. Lo que haremos será considerar la envolvente convexa de esos puntos y la llamaremos n -símplice.

Definición 1.1.3. Sea $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ un conjunto de puntos afínmente independientes en \mathbb{R}^N . Llamamos **n -símplice geométrico** generado por a_0, a_1, \dots, a_n a los puntos de \mathbb{R}^N que se pueden

escribir como

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$$

siendo $t_i \geq 0$ para todo i y $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Para cada x perteneciente al n -símplice, llamamos coordenadas baricéntricas a los valores t_i asociados a x . Cada símplice generado por un subconjunto de $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ se llama **cara**, a una cara de dimensión 0 se dice **vértice**. Se considera que el conjunto vacío es una cara del símplice, de dimensión -1.

Es claro que de existir unos ciertos t_i tales que $x = \sum_i t_i a_i$, si existen otros p_i tales que $x = \sum_i p_i a_i$ tendríamos que $0 = x - x = \sum_i (t_i - p_i) a_i$ y $\sum_i t_i - \sum_i p_i = 1 - 1 = 0$, por lo que usando que $\{a_0, \dots, a_n\}$ son afinmente independientes tenemos que $t_i = p_i$ para todo i . Es decir, para cada punto perteneciente a un símplice sus coordenadas baricéntricas son únicas. Nótese que un punto pertenece a una cara propia si y sólo si pertenece a la frontera relativa del símplice.

Recordemos que todo esto lo estamos contando para poder descomponer un politopo en partes más sencillas, de la misma manera que se descompone un polígono en triángulos. La construcción que consideramos para hacer eso es la conocida como *complejo simplicial*.

Definición 1.1.4. Un **complejo simplicial geométrico** en \mathbb{R}^n es una familia K de símplices tales que:

1. Toda cara de un símplice de K está en K .
2. La intersección de dos símplices de K es una cara de ambos.

Definimos la dimensión de K como la mayor dimensión de sus símplices. Sea $|K|$ el espacio topológico formado por la unión de los símplices en K . Se llama a $|K|$ el **subespacio subyacente** (o politopo) de K . Diremos que un espacio topológico X es **triangulable** cuando existe un complejo simplicial finito K tal que su politopo $|K|$ es homeomorfo a X . Se define el n -esqueleto de K , denotado por K^n , como el complejo simplicial formado por los símplices de K con dimensión menor o igual que n .

La primera condición es razonable ya que cuando tratemos con un símplice de nuestro complejo querremos poder hacer referencia a las partes que lo generan, es decir, a sus caras. Por lo que es una manera de poder hablar de esas caras de forma propia. Respecto a la segunda condición, quizá no es tan obvio el porqué es necesaria. Es para evitar casos degenerados en los que, por ejemplo, dos triángulos compartan sólo media arista o una parte de su área; como si se estuvieran "mal pegados". De ahora en adelante se considerará de forma implícita que los complejos simpliciales son **localmente finitos**, es decir, que para todo punto en \mathbb{R}^n existe un entorno del punto que tiene intersección no vacía con una cantidad finita de símplices del complejo. Se puede probar que la topología de $|K|$ con esta condición se caracteriza de la siguiente forma: un conjunto A es abierto en $|K|$ si y sólo si $A \cap \sigma$ es abierto, para todo símplice $\sigma \in K$.

Hasta ahora hemos contado de forma geométrica cómo se construye un complejo simplicial. sin embargo, hay otra forma natural de describir estos complejos simpliciales; consiste en describirlos como familias de conjuntos.

Definición 1.1.5. Llamamos **complejo simplicial abstracto** a una familia de conjuntos finitos \mathcal{S} de un conjunto V de vértices tales que cualquier subconjunto de un conjunto en \mathcal{S} está en \mathcal{S} .

Si nos paramos a pensar un momento, la condición de que cualquier subconjunto no vacío de un conjunto en \mathcal{S} recuerda a que cualquier cara de un símplice esté en el complejo simplicial. Además, aquí no tenemos que preocuparnos de que los símplices se intersequen de formas degeneradas, ya que la intersección de dos conjuntos cualesquiera siempre es un subconjunto de ambos y, por ello, ya sabemos que está en \mathcal{S} .

Por tanto, es trivial por las definiciones que cualquier complejo simplicial geométrico se puede considerar como un complejo simplicial abstracto; basta tomar como conjunto V el conjunto de vértices (0-símplices) de K , y como \mathcal{S} los subconjuntos de vértices correspondientes a cada símplice de K . El recíproco no es tan trivial, aunque no es complicado ver que si el complejo es finito entonces podemos representarlo como un complejo simplicial en \mathbb{R}^n , para un cierto n .

Otra forma natural de ver un complejo simplicial es como un conjunto de varios símplices "pegados" o, dicho más formalmente, como un espacio cociente. Para verlo, introducimos el símplice geométrico estándar Δ^n , sacado del Capítulo 2 de [12], pág. 102-104.

Se definen como

$$\Delta^n := \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_i t_i = 1 \text{ y } t_i \geq 0, \forall i\}$$

Denotamos por $\partial\Delta^n$ al **borde** de Δ^n , es decir, a la unión de las caras propias de Δ^n . Al interior de Δ^n se le denota por $\mathring{\Delta}^n$, claramente $\mathring{\Delta}^n = \Delta^n \setminus \partial\Delta^n$.

Es sencillo ver que todo n -símplice es homeomorfo a Δ^n . Basta tomar como homeomorfismo la aplicación (af n) que manda a cada punto del símplice a sus coordenadas baric nticas. Esta aplicación es canónica, una vez que se ha elegido un orden para los vértices del n -símplice en cuestión.

Ahora veamos formalmente aquello de que los complejos simpliciales son símplices "pegados". Sea T un complejo simplicial geométrico, denotaremos por T_α a cada símplice de T . Para cada α , $\Phi_\alpha : \Delta^{n_\alpha} \rightarrow T_\alpha$ será el homeomorfismo (af n) naturalmente definido entre cada n -símplice T_α y Δ^n . A esta aplicación se le suele llamar **aplicación característica** de T_α . Consideramos el espacio $\mathcal{A} = \dot{\cup}_\alpha \Delta^{n_\alpha}$, donde $\dot{\cup}$ denota la unión disjunta. Definimos $\Phi : \mathcal{A} \rightarrow |T|$ como Φ_α en cada componente. Esta aplicación es continua, por serlo en cada componente. También es claro que Φ es sobreyectiva, por construcción. Además, si A es un abierto en \mathcal{A} , entonces $A \cap \Delta^{n_\alpha}$ es abierto para todo α . Por ello, $\Phi_\alpha(A \cap \Delta^{n_\alpha})$ es abierto en T_α , para todo α . Por la topología con la que hemos dotado a $|T|$, esto nos dice que $\Phi(A)$ es abierto. Tenemos que Φ es continua, abierta y sobreyectiva, por lo que es una aplicación cociente. Esto nos dice que $|T|$ es homeomorfo a \mathcal{A}/\sim , donde \sim es la relación inducida por Φ . Por tanto, cuando nos resulte conveniente, consideraremos un complejo simplicial como una unión disjunta de símplices en la que se hace una cierta identificación.

Antes de terminar esta sección y empezar a hablar de homología, vamos a dar herramientas para construir complejos simpliciales a partir de una nube de puntos. En concreto, vamos a hablar de los complejos de  ech y de Rips, así como de la relación entre ellos.

Definición 1.1.6. [9] Dada una familia de conjuntos $\mathcal{U} = U_\alpha$, el complejo  ech de \mathcal{U} , denotado por $\mathcal{C}(\mathcal{U})$, es el complejo simplicial abstracto formado por los k -símplices que se corresponden con cada intersección no vacía de $k+1$ elementos distintos de \mathcal{U} .

En nuestro caso, la forma de construir un complejo de  ech a partir de una nube de puntos será la siguiente. Sea $X = \{x_\alpha\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n , sea $\epsilon > 0$; tomamos $U_\alpha = B(x_\alpha, \frac{\epsilon}{2})$, donde $B(x_\alpha, \frac{\epsilon}{2})$ denota la bola abierta de centro x_α y de radio $\frac{\epsilon}{2}$. Al complejo de  ech de estos U_α lo denotaremos por $\mathcal{C}_\epsilon(X)$. La condición de que cada k -símplice se corresponde con cada intersección no vacía de $k+1$ distintos U_α podemos traducirla de la siguiente manera: si hay dos bolas U_α con intersección no vacía, consideramos el segmento que une sus centros; si hay tres bolas de intersección no vacía, consideramos el triángulo que tiene sus centros como vértices; etc. Esto nos puede dar una idea que, pese a que no es cierto en general que este complejo simplicial abstracto tenga realización en \mathbb{R}^n , permite visualizar un resultado importante sobre los complejos de  ech: el Teorema de  ech, también conocido con el nombre de 'Nerve Theorem'. No daremos demostración de este Teorema, tan sólo lo enunciaremos. El resultado se atribuye a [3], aunque lo hemos sacado del Capítulo 4G de [12].

Teorema 1.1.7. Sea \mathcal{U} un recubrimiento abierto de un espacio paracompacto X , con la propiedad de que toda intersección no vacía de una cantidad finita de conjuntos en \mathcal{U} sea contráctil. Entonces, X tiene el mismo tipo de homotopía que el complejo de  ech de \mathcal{U} .

Es conocido que \mathbb{R}^N es paracompacto y es claro que la intersección finita de bolas es contráctil, por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema 1.1.7.

Es por este resultado que nos interesa hablar de los complejos de  ech, porque de alguna forma capturan la disposición de esa nube de puntos inicial $\{x_\alpha\}$. Desgraciadamente, en la práctica resulta complicado calcular el complejo de  ech de un conjunto de puntos, por lo que es común que se usen en su lugar los complejos de Rips.

Definición 1.1.8. [9] Sea $X = \{x_\alpha\}$ un conjunto de puntos en \mathbb{R}^n , sea $\epsilon > 0$. El complejo de Rips de X para la distancia $\epsilon > 0$, denotado por $\mathcal{R}_\epsilon(X)$, es el complejo simplicial abstracto cuyos

k -símplices se corresponden con una $(k+1)$ -tupla de puntos de X que estén, dos a dos, a distancia menor que ϵ .

Es claro que un complejo de Rips es una aproximación mucho menos fina que un complejo de Čech para estudiar la disposición de X , lo cual se refleja en que no haya un análogo al Teorema 1.1.7 para el complejo de Rips. Sin embargo, el siguiente resultado nos dice que considerando varios complejos de Rips, para distintos ϵ , podemos aproximar un complejo de Čech [9].

Teorema 1.1.9. *Sea $X = \{x_\alpha\}$ una colección de puntos en \mathbb{R}^n . Se cumple que*

$$\mathcal{R}_\epsilon(X) \subset \mathcal{C}_{\epsilon'}(X) \subset \mathcal{R}_{\epsilon'}(X)$$

siempre que $\frac{\epsilon'}{\epsilon} \geq \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. Además, esta es la proporción más pequeña para la que estas inclusiones se cumplen en general.

Demostración. La segunda inclusión es trivial ya que si hay $k+1$ bolas de la forma $B(x_\alpha, \frac{\epsilon'}{2})$ de intersección no vacía, tenemos que las intersecciones dos a dos tampoco son vacías y, por ello, los distintos x_α están, dos a dos, a distancia menor que ϵ' .

Probar la primera inclusión es equivalente a lo siguiente: si tenemos una colección de puntos en \mathbb{R}^n tal que cada par de puntos está a distancia a lo sumo ϵ , entonces las bolas centradas en los puntos de radio $\epsilon'/2$ tienen al menos un punto en común. Probar esto para un conjunto de $k+1$ puntos implica que cada k -símplice de $\mathcal{R}_\epsilon(X)$ está en $\mathcal{C}_{\epsilon'}(X)$.

Empezamos probando el caso con $n'+1$ puntos, con $n' \leq n$. Consideramos la función $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(y) = \max_{0 \leq i \leq n'} \|x_i - y\|$. Esta función es continua por ser el máximo de funciones continuas y es claramente coerciva, es decir, $f(y)$ tiende a $+\infty$ siempre que $\|y\|$ tiende a $+\infty$. Por tanto, f tiene un mínimo global $f(y_0)$. Decimos que un punto x_i es crítico si $\|x_i - y_0\| = f(y_0)$.

Nótese que y_0 debe estar en la envolvente convexa de los puntos críticos. Si no fuera el caso, existiría un vector v tal que $v^t(x_i - y_0) > 0$, para todo x_i punto crítico. Tendríamos que

$$\|x_i - y_0\|^2 = \|x_i - (y_0 + \lambda v)\|^2 + 2\lambda v^t(x_i - y_0) > \|x_i - (y_0 + \lambda v)\|^2$$

para todo $\lambda > 0$, por lo que si tomamos $0 < \lambda < 1$ tenemos que $f(y_0 + \lambda v) < f(y_0)$, lo que contradice el que y_0 sea mínimo global.

Para simplificar la notación, hacemos la traslación $u_i = x_i - y_0$. Nos quedamos con los vértices que son críticos y los denotamos por u_j , donde $0 \leq j \leq n'' < n'$. Hemos llegado a que el punto 0 pertenece al símplice generado por los puntos u_j , por lo que existen $a_0, \dots, a_{n''}$ tales que $\sum_j a_j u_j = 0$, con $a_j > 0$ y $a_0 \geq a_j$. Entonces $-u_0 = \sum_{j=1}^{n''} a_j u_j$ y, multiplicando por u_0^t llegamos a que

$$-f(y_0) = -\|u_0\|^2 = \sum_{i=1}^{n''} \frac{a_i}{a_0} u_0^t u_j$$

Es claro que debe existir al menos un i_0 tal que $\frac{a_{i_0}}{a_0} u_0^t u_{i_0} \leq -f(y_0)/n''$ y, como $n'' < n$ y $\frac{a_{i_0}}{a_0}$, esto implica que $f(y_0)/d \leq -u_0^t u_{i_0}$. Si no existiera tal i_0 , no podría darse la igualdad previa. Recordemos que $f(y_0)^2 = \|u_0\|^2 = \|u_{i_0}\|^2$. Llegamos a que

$$f(y_0)^2(1 + (2/n) + 1) \leq \|u_0\|^2 - 2u_0^t u_{i_0} + \|u_{i_0}\|^2 = \|u_0 - u_{i_0}\|^2 = \|x_0 - x_{i_0}\|^2 \leq \epsilon^2$$

Por esto $f(y_0) \leq \frac{\epsilon}{2} \sqrt{\frac{2n}{n+1}} \leq \frac{\epsilon'}{2}$. Hemos llegado a que las bolas de radio $\epsilon/2$ centradas en esos $n'+1$ puntos deben tener todas a y_0 en común.

Para el caso con $n+2$ puntos, o más, basta usar el teorema de Helly. Este resultado clásico nos dice que si tenemos una colección X_1, \dots, X_m finita de subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n , con $n > m$, tal que la intersección de $n+1$ subconjuntos es no vacía entonces $\bigcap_{j=1}^m X_j \neq \emptyset$. En nuestro caso los conjuntos X_j son las bolas centradas en cada punto, por lo que es claro que son subconjuntos convexos. Además, la condición de que la intersección de $n+1$ subconjuntos sea no vacía es lo que hemos probado ya.

Veamos que esta cota es la menor posible, ya que se alcanza en algunos casos. Basta considerar el símple Δ^n . Es claro que el punto y_0 de la demostración previa se corresponde con el baricentro de Δ^n , esto es, el punto cuyas coordenadas baricéntricas son $t_i = 1/(n+1)$, para todo i . Denotemos a este punto por b . Si calculamos la distancia del baricentro a un vértice ϵ_i cualquiera, obtenemos

$$d(\epsilon_i, b)^2 = \left(1 - \frac{1}{(n+1)}\right)^2 + n \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 = \frac{n^2 + n}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1}$$

Con esto acabamos de ver que, para obtener Δ^n a través de un complejo de Čech cuyos vértices se corresponden con los de Δ^n , podemos tomar $\epsilon' = 2\sqrt{\frac{n}{n+1}}$. Nótese que Δ^n es un símple geométrico que se corresponde de manera natural con el complejo de Rips con $\epsilon = \sqrt{2}$ y vértices los mismos que Δ^n . Por tanto, $\frac{\epsilon'}{\epsilon} = \sqrt{\frac{2n}{n+1}}$. \square

1.2. Homología simplicial

La forma que tiene la homología de formalizar la "detección de agujeros de distintas dimensiones" es con la noción de grupos de homología de un complejo de cadenas. En el caso de la homología simplicial, ese complejo de cadenas (simplicial) viene dado por la estructura de un complejo simplicial.

Primero, debemos dar una orientación a cada símple. Diremos que dos ordenaciones de sus vértices son equivalentes si uno se obtiene del otro mediante una permutación par. Notar que, bajo esta definición, si la dimensión del símple es mayor que 0 tenemos dos clases de equivalencia de ordenaciones, a las cuales llamamos **orientación**. Denotamos $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ al n -símple generado por a_0, a_1, \dots, a_n con la ordenación dada por $a_0 < a_1 < \dots < a_n$, o con cualquier reordenación par del mismo. Denotaremos por $-[a_0, a_1, \dots, a_n]$ al mismo símple con una reordenación impar. Una orientación de un complejo simplicial consiste en elegir una orientación para cada símple. Recordemos que un grupo abeliano libre generado por S es el conjunto de combinaciones lineales formales de elementos de S con coeficientes en \mathbb{Z} , considerado como grupo con la suma.

Definición 1.2.1. Sea K un complejo simplicial orientado. Llamamos **grupo de cadenas** simpliciales de dimensión n al grupo abeliano libre generado por los símlices de dimensión n en K , el cual se denota por $C_n(K)$. Sea $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ el **operador borde** que está dado por $\partial_n[a_0, a_1, \dots, a_n] = \sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n]$, donde $[a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n]$ denota el $(n-1)$ -símple generado por $[a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n]$, es decir, se omite el vértice i -ésimo. Cuando se sobreentienda en qué dimensión se está trabajando se omitirá el subíndice de ∂_n .

Para comprobar que el operador borde está bien definido hay que comprobar que la imagen de un símple no depende de la ordenación elegida, lo que equivale a comprobar que $\partial(-\sigma) = -\partial(\sigma)$. Para probar esto basta con comprobar que cambia el signo al permutar dos vértices adyacentes. Consideramos $\partial_n[a_0, a_1, \dots, a_j, a_{j+1}, \dots, a_n]$ y $\partial_n[a_0, a_1, \dots, a_{j+1}, a_j, \dots, a_n]$. Aplicando la definición, es claro que los términos i -ésimos (con $i \neq j, j+1$) son iguales dos a dos con un signo cambiado. Para $i = j$ y $i = j+1$ tenemos en la primera expresión

$$(-1)^j [a_0, \dots, a_{j-1}, \widehat{a_j}, a_{j+1}, \dots, a_n] + (-1)^{j+1} [a_0, \dots, a_j, \widehat{a_{j+1}}, a_{j+2}, \dots, a_n]$$

Y en la segunda

$$(-1)^j [a_0, \dots, a_{j-1}, \widehat{a_{j+1}}, a_j, \dots, a_n] + (-1)^{j+1} [a_0, \dots, a_{j+1}, \widehat{a_j}, a_{j+2}, \dots, a_n]$$

Con lo que se ve que ambas expresiones tan sólo se diferencian en un signo y, por ello, está bien definido el operador borde.

Lema 1.2.2. Se cumple que $\partial_{n-1} \circ \partial_n$ es el homomorfismo nulo.

Demostración. Sea $[a_0, a_1, \dots, a_n]$ un n -símple orientado. Por definición,

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n [a_0, a_1, \dots, a_n] = \partial_{n-1} \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \widehat{a_i}, \dots, a_n] \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^n \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_n] + \sum_{i=0}^n \sum_{j > i} (-1)^{j-1} (-1)^i [a_0, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_n] = 0$$

donde tenemos que los términos de los sumatorios son iguales dos a dos pero con distinto signo. \square

Con esta noción tan algebraica parece que perdemos la conexión con la geometría de nuestro complejo, pero en realidad no tanto. Si tomamos una cadena (una combinación lineal de simplices) y su borde resulta ser 0, lo más natural es pensar que eso quiere decir que "no tiene borde", que es un "ciclo". Esta es la manera en la que la homología "detecta agujeros". Sin embargo, como ya se ha visto, el borde de un borde es también 0; pero en este caso estamos "detectando" un "falso positivo", en el sentido de que ese ciclo no rodea ningún agujero. Esta idea de distinguir entre ciclos (relevantes) y bordes (falsos positivos) se formaliza de la siguiente manera.

Definición 1.2.3. El núcleo de ∂_n se llama grupo de n-ciclos y se denota por $Z_n(K)$, mientras que su imagen se llama grupo de (n-1)-bordes y se denota por $B_{n-1}(K)$. Por el Lema 1.2.2, y por ser $C_n(K)$ abeliano, tenemos que $B_n(K)$ es un subgrupo normal de $Z_n(K)$. Por esto podemos definir el **grupo de homología n-ésimo** como el cociente $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$. Se define el **número de Betti n-ésimo** como el rango de este grupo, es decir, $\beta_n(K) = \text{rank}(H_n(K))$.

Cabría preguntarse hasta que punto se pueden calcular los grupos de homología sin desarrollar mucha artillería teórica. La respuesta es afirmativa para el caso de complejos simpliciales finitos, en cuyo caso todos los grupos que aparecen son finitamente generados y la aplicación ∂_n se puede pensar simplemente como una matriz sobre los enteros. El algoritmo que existe se le conoce como el algoritmo de reducción, el cuál se basa en calcular la forma normal del homomorfismo ∂_n . De esta forma, los factores invariantes de ∂_n caracterizan a los grupos de homología. Sin embargo, no es necesario este algoritmo para calcular los grupos de homología de un complejo, ya que es posible hacerlo con la definición.

Ejemplo 1.2.4. En la Figura 1.1 se muestra la construcción de un complejo de Čech de un conjunto de puntos $X = \{A, B, C, D, E, F, G\}$, para un cierto ϵ . Nótese que, en este caso, el complejo de Rips con el mismo ϵ sería idéntico. A partir de la figura es claro que

$$\mathcal{C}(X) = \{\emptyset, A, B, C, D, E, F, G, AB, BC, CD, BD, CE, DE, DF, FG, GA, BCD, CDE\}$$

Tomamos como orientación de $\mathcal{C}(X)$ la que viene ya dada, es decir, para el simplex AB tomamos $[A, B]$ y hacemos lo mismo para el resto. De esta forma, C_0 es el grupo libre y abeliano generado por $\{[A], [B], [C], [D], [E], [F], [G]\}$, C_1 está generado por $\{[A, B], [B, C], [C, D], [B, D], [C, E], [D, E], [D, F], [F, G], [G, A]\}$ y C_2 por $\{[B, C, D], [C, D, E]\}$. Como $C_n = \{0\}$ si $n \geq 3$, es obvio que $H_n = \{0\}$ para $n \geq 3$. Empezamos calculando $\text{im}(\partial_1)$. Por definición, es el subgrupo de C_0 generado por

$$\{[B] - [A], [C] - [B], [D] - [C], [D] - [B], [E] - [C], [E] - [D], [F] - [D], [G] - [F], [A] - [G]\}$$

Al hacer el cociente $C_0/\text{im}(\partial_1)$ tenemos que

$$[[A]] = [[B]] = [[C]] = [[D]] = [[E]] = [[F]] = [[G]]$$

Por lo que $H_0 \cong \mathbb{Z}$. Para calcular H_1 , empezamos por determinar $\ker(\partial_1)$. Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_9 \in \mathbb{Z}$, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha_1([B] - [A]) + \alpha_2([C] - [B]) + \alpha_3([D] - [C]) + \alpha_4([D] - [B]) + \alpha_5([E] - [C]) + \alpha_6([E] - [D]) + \\ + \alpha_7([F] - [D]) + \alpha_8([G] - [F]) + \alpha_9([A] - [G]) = 0 \end{aligned}$$

Lo que nos da el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{cccc} -\alpha_1 + \alpha_9 = 0 & \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_5 = 0 & \alpha_5 + \alpha_6 = 0 & \alpha_8 - \alpha_9 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_4 = 0 & \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_6 - \alpha_7 = 0 & \alpha_7 - \alpha_8 = 0 & \end{array}$$

De donde se obtiene que

$$\alpha_1 = \alpha_7 = \alpha_8 = \alpha_9 \quad \alpha_5 = -\alpha_6 \quad \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_5 \quad \alpha_4 = \alpha_1 - \alpha_3 - \alpha_5$$

Por lo que $\ker(\partial_1)$ es el subgrupo generado por

$$\{[AB] + [GA] + [FG] + [DF] + [BD], \quad [BC] + [CD] - [BD], \quad [BC] + [CE] - [DE] - [BD]\}$$

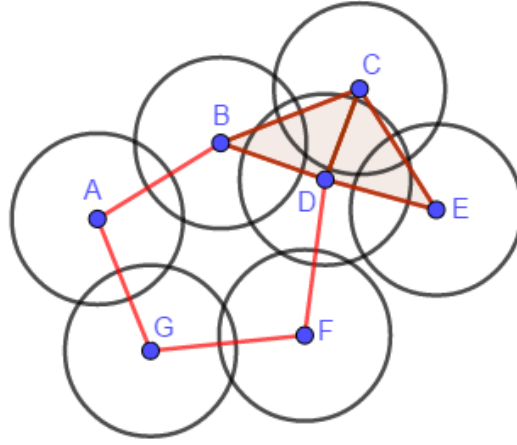


Figura 1.1: Contrucción de un complejo de Čech a partir de una nube de puntos.

Ahora calculamos $\text{im}(\partial_2)$. Por definición, es el subgrupo generado por $\{[BC] + [CD] - [BD], [DE] - [CE] + [CD]\}$, como $[BC] + [CE] - [DE] - [BD] = [BC] + [CD] - [BD] - ([DE] - [CE] + [CD])$ podemos tomar como generadores $\{[BC] + [CE] - [DE] - [BD], [BC] + [CD] - [BD]\}$. Con esto es claro que $H_1 \cong \mathbb{Z}$. Ahora tan sólo nos queda averiguar $\ker(\partial_2)$ para calcular H_2 . Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}$, por definición tenemos que $\alpha_1([BC] + [CD] - [BD]) + \alpha_2([DE] - [CE] + [CD]) = 0$, lo que implica que $\alpha_1 = 0 = \alpha_2$, por lo que $H_2 = \{0\}$.

Si interpretamos estos resultados con el dibujo, lo que acabamos de demostrar es que el polígono de vértices A, B, D, F, G encierra al único "agujero" de dimensión 1 y que los otros dos posibles generadores de ciclos, los triángulos de vértices B, C, D y C, D, E , en realidad no encierran ningún ciclo, por ser cada uno borde de un triángulo.

Otra pregunta razonable que podríamos hacernos es: ¿qué ocurre con los grupos de homología de dos complejos simpliciales cuyos politopos son homeomorfos entre sí? O, más en general, ¿qué ocurre cuando tenemos un morfismo entre complejos simpliciales? La respuesta a la segunda pregunta es sencilla y la daremos a continuación. La respuesta a la primera pregunta es que los grupos de homología son, en ese caso, isomorfos. La prueba directa y clásica de este hecho es a través de un proceso llamado subdivisión baricéntrica; sin embargo, la forma en la que demostraremos este hecho en este trabajo pasará por la homología singular (ver los Teoremas 2.1.5 y 2.3.5).

Definición 1.2.5. Sean K y L dos complejos simpliciales abstractos, con conjuntos de vértices V y W . Una **aplicación simplicial** de K a L es una aplicación $f : V \rightarrow W$ con la propiedad de que la imagen de todo símplex de K es un símplex de L . Esta propiedad hace que podamos escribir $f : K \rightarrow L$.

Como es previsible, si tenemos una aplicación simplicial ello nos induce un homomorfismo entre los grupos de cadenas correspondientes a cada complejo.

Definición 1.2.6. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial. Definimos $f_\# : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ como

$$f_\#([v_0, v_1, \dots, v_p]) = \begin{cases} [f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p)] & \text{si } f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p) \text{ son distintos dos a dos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para ver que está bien definido necesitamos ver, como en el caso del operador borde, que $f_\#(-\sigma) = -f_\#(\sigma)$, pero es obvio por la definición que si permutamos dos vértices adyacentes de σ su imagen es la misma pero con dos vértices adyacentes permutados.

Lema 1.2.7. Sea $f : K \rightarrow L$ una aplicación simplicial.

1. El homomorfismo $f_\#$ conmuta con el operador borde.
2. Toda sucesión de homomorfismos $f_p : C_p(K) \rightarrow C_p(L)$ que conmuta con el operador borde induce un homomorfismo $f_* : H_p(K) \rightarrow H_p(L)$.

Demostración. Queremos ver que $\partial(f_{\#}([v_0, v_1, \dots, v_p])) = f_{\#}(\partial([v_0, v_1, \dots, v_p]))$. Llamemos σ al simple generado por $[f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_p)]$ y distingamos los siguientes casos. *Caso 1.* $\dim(\sigma) = p$. En este caso todos los vértices son distintos y la igualdad viene de la definición de $f_{\#}$ y ∂ . *Caso 2.* $\dim(\sigma) \leq p - 2$. En este caso $f_{\#}([v_0, v_1, \dots, v_p]) = 0$ porque hay al menos dos i, j con $i \neq j$ tales que $f(v_i) = f(v_j)$, por lo que el lado izquierdo de la igualdad es 0. El derecho también se hace cero porque, para todo i , hay al menos un par de puntos repetidos en $f(v_0), f(v_1), \dots, f(v_{i-1}), f(v_{i+1}), \dots, f(v_p)$. *Caso 3.* $\dim(\sigma) = p - 1$. En este caso asumimos, sin pérdida de generalidad, que $f(v_0) = f(v_1)$ y que el resto de imágenes son distintas dos a dos. De la misma forma que en el caso previo, tenemos que el lado izquierdo de la igualdad es 0. En el lado derecho todos los sumandos son 0 salvo cuando $i = 0, 1$ por lo que resulta que es igual a $[f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_p)] - [f(v_0), f(v_2), \dots, f(v_p)]$ y como $f(v_1) = f(v_0)$ tenemos que se cancelan entre sí.

Ahora veamos la segunda parte. Necesitamos ver que si $[v] = [w]$ en $H_p(K)$ entonces $[f_p(v)] = [f_p(w)]$. Para ello, basta comprobar que $[f_p(v - w)] = [0]$. Sabemos que existe un $d \in C_{p+1}(K)$ tal que $\partial d = v - w$, por ser $[v] = [w]$. Es claro que $f_p(v - w) = f_p(\partial d) = \partial f_{p+1}(d)$ por lo que $[f_p(v - w)]$ es un p -borde en L . \square

Es claro por cómo se define $f_{\#}$ que si f es la identidad $f_{\#}$ y f_* también lo son. Además, también se cumple por la definición que si $f : K \rightarrow L$ y $g : L \rightarrow M$ son aplicaciones simpliciales, entonces $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Con esto, la homología simplicial es un functor covariante de la categoría de complejos simpliciales geométricos y aplicaciones simpliciales a la categoría de grupos y homomorfismos.

Teorema 1.2.8. *Sea K un complejo simplicial. Entonces el grupo $H_0(K)$ es un grupo libre y abeliano. Si $\{v_{\alpha}\}$ es un conjunto de vértices de K tal que hay un vértice de cada componente conexa por caminos de $|K|$, entonces $\{[v_{\alpha}]\}$ es una base de $H_0(K)$.*

Demostración. Paso 1. Primero definiremos una relación de equivalencia entre los vértices de K , en el siguiente paso ya se probará el teorema como tal. Sean v y w vértices de K , definimos $v \sim w$ si existe una sucesión a_0, \dots, a_n de vértices en K tal que $v = a_0$, $w = a_n$ y $a_i a_{i+1}$ es un 1-símplice de K , para cada i . Es claro que esto es equivalente a decir $u \sim w$ si y sólo si u y w están en la misma componente conexa por caminos de $|K|$. Definimos $C_v = \{\sigma \in K : \exists w \in \sigma, v \sim w\}$, que se corresponde con la componente conexa por caminos de $|K|$ que contiene a v . Por hipótesis tenemos que $\{C_{v_{\alpha}}\}$ es el conjunto formado por todas las componentes conexas por caminos de $|K|$.

Paso 2. Ahora probamos el teorema. Sea w un vértice de K , tenemos que w pertenece a un único $C_{v_{\alpha}}$. Por hipótesis, $w \sim v_{\alpha}$. Esto nos dice que existe una 1-cadena simplicial de la forma

$$\sigma_w = [a_0, a_1] + \dots + [a_{n-1}, a_n]$$

Si calculamos $\partial(\sigma_w) = a_n - a_0 = w - v_{\alpha}$, por lo que $[w] = [v_{\alpha}]$ en $H_0(K)$. Esto nos dice que $\{[v_{\alpha}]\}$ es sistema generador de $H_0(K)$. Ahora veremos que $H_0(K)$ es libre y habremos terminado. Supongamos que existe una cadena $c = \sum_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha}$ tal que $c = \partial d$, para alguna 1-cadena $d \in C_1(K)$. Como cada 1-símplice está en una única componente conexa de $|K|$, podemos escribir $d = \sum_{\alpha} d_{\alpha}$, donde $d_{\alpha} \in C_{v_{\alpha}}$. Como $\partial d = \sum_{\alpha} \partial d_{\alpha}$, tenemos que $\partial d_{\alpha} = n_{\alpha} v_{\alpha}$. Veamos que $n_{\alpha} = 0$. Definimos $\epsilon : C_0(K) \rightarrow \mathbb{Z}$ como el homomorfismo que lleva $\sum_{\alpha} n_{\alpha} v_{\alpha}$ en $\sum_{\alpha} n_{\alpha}$. Es claro que $\epsilon(\partial[v, w]) = \epsilon(w - v) = 1 - 1 = 0$ para cualquier 1-cadena $[v, w]$. Por tanto, $n_{\alpha} = \epsilon(\partial d_{\alpha}) = 0$. \square

Definición 1.2.9. Sea K_0 un subcomplejo simplicial de K . Definimos el **grupo de cadenas relativas a K modulo K_0** como $C_p(K)/C_p(K_0)$ y lo denotamos $C_p(K, K_0)$.

Si orientamos los p -símplices en K obtenemos una base de $C_p(K)$ y aquellos p -símplices contenidos en K_0 son, por definición, base de $C_p(K_0)$. Entonces el cociente $C_p(K)/C_p(K_0)$ es libre ya que tiene como base los elementos de la forma $[\sigma_i] = \sigma_i + C_p(K_0)$, donde σ_i es un p -símplice que no está en K_0 . Nótese que el operador borde $\partial_p : C_p(K_0) \rightarrow C_{p-1}(K_0)$ tan sólo es la restricción del operador borde de $C_p(K)$ a $C_p(K_0)$, dado que K_0 tiene estructura de complejo simplicial y por ello está bien definido. Este homomorfismo induce $\partial_p : C_p(K, K_0) \rightarrow C_{p-1}(K, K_0)$, ya que tan sólo estamos tomando un cociente y hemos visto que $\partial_p(C_p(K_0)) \subset C_{p-1}(K_0)$.

Capítulo 2

Homología singular

Ahora vamos a presentar otra teoría de homología, la homología singular. La idea es bastante más abstracta y difícil de visualizar que en el caso simplicial, además de que calcular los grupos de homología singulares partiendo de la definición resulta, en general, imposible. Si es menos intuitivo, más difícil de entender y más difícil de usar en la práctica, ¿qué aporta el estudio de la homología singular? Pues que resulta más sencilla para probar resultados teóricos como, por ejemplo, la invarianza homotópica. Además todos los resultados que probemos para la homología singular se traducirán en resultados de homología simplicial ya que, como se probará más adelante, los grupos de homología simplicial y los singulares de complejos simpliciales son isomorfos. También hablaremos en este capítulo de homología con coeficientes, ya que en el análisis topológico de datos se suele hacer homología con coeficientes en \mathbb{F}_2 .

2.1. Definición y primeras propiedades

Recordemos que en la Sección 1.1 se definieron los símlices Δ^n . Es a partir de estos Δ^n que podemos definir los n -símlices singulares. Los contenidos de esta sección, mientras no se diga lo contrario, se han sacado del Capítulo 4 de [15], pág. 162-164.

Definición 2.1.1. Sea X un espacio topológico, llamamos **n -símplice singular** de X a una aplicación continua $f : \Delta^n \rightarrow X$.

El que estos símlices reciben el apellido 'singular' viene de que una aplicación de Δ^n en X puede presentar casos algo extremos. Por ejemplo, la curva de Peano es un 1-símplice singular cuya imagen es $[0, 1] \times [0, 1]$; lo cual contradice nuestra intuición de dimensión.

La forma de definir los grupos de cadenas singulares es totalmente análoga al caso simplicial.

Definición 2.1.2. El grupo abeliano generado por los n -símlices singulares de X se denota por $S_n(X)$ y se llama **grupo de cadenas singular** de X en dimensión n . De la misma forma que en el caso simplicial, los elementos de $S_n(K)$ se escriben como combinaciones lineales formales de n -símlices, tomando coeficientes en \mathbb{Z} .

Para seguir con el mismo esquema que con el caso simplicial, ahora queremos definir lo que es el operador borde. Pero ello entraña una dificultad extra y es que en el caso simplicial ya teníamos una intuición de lo que es el borde de un símplex geométrico. Sin embargo, en este caso tenemos que nuestros símlices son funciones continuas de Δ^n en X . Pues consideraremos el borde de cada símplex como la suma formal (alternando los signos) de la función restringida a cada cara de Δ^n .

Ahora hacemos el desarrollo formal de esta idea, sean a_0, \dots, a_n puntos en \mathbb{R}^N , definimos $l : \Delta^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ como $l(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n x_i(a_i - a_0)$. Esta aplicación lleva cada vértice ϵ_i de Δ^n a a_i y la denotamos por $l(a_0, \dots, a_n)$. A esta aplicación se le conoce como símplex lineal singular. Es claro que $l(\epsilon_0, \dots, \epsilon_n)$ es la identidad de Δ^n en Δ^n . Manteniendo la notación previamente usada, denotamos por $l(\epsilon_0, \dots, \hat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n)$ a la aplicación que lleva Δ^{n-1} a la cara de Δ^n formada por los vértices

$\epsilon_0, \dots, \epsilon_{i-1}, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_n$. Sea T un n -símplice singular cualquiera, si hacemos la composición $T \circ l(\epsilon_0, \dots, \widehat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n)$ tenemos un $(n-1)$ -símplice singular. Esta es la forma en la que nos vamos a restringir a cada cara de Δ^n para definir el operador borde.

Definición 2.1.3. Definimos $\partial_n : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ como $\partial T = \sum_{i=0}^n (-1)^i T \circ l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n)$, donde T es un n -símplice singular. Como tenemos el homomorfismo definido sobre cualquier elemento generador de $S_n(X)$, está definido para cualquier elemento en $S_n(X)$. Veremos más adelante que se cumple que $\partial^2 = 0$. De forma análoga al caso simplicial, definimos el grupo de **ciclos** como $Z_n = \ker(\partial_n)$ y el grupo de **bordes** como $B_n = \text{im}(\partial_{n+1})$, siendo el **grupo de homología singular** de orden n definido como $Z_n(X)/B_n(X)$. Denotaremos a este grupo como $H_n(X)$, siempre que ello no lleve a confusión con la homología simplicial. Se define el **número de Betti** (singular) n -ésimo como el rango de $H_n(X)$.

En el caso simplicial, tras la definición, nos dedicamos a calcular directamente un ejemplo. Llegados a este punto ya se puede ver que esto en el caso singular resulta harto imposible: ni tan siquiera sabemos cosas como que los grupos de homología singular de un complejo simplicial finito sean finitamente generados. Este ejemplo es un resultado que nos gustaría que fuese cierto y, de hecho, lo es. Lo veremos cuando se demuestre el isomorfismo entre los grupos de homología singulares y simpliciales.

Por tanto, pasamos a lo siguiente que se hizo en el caso simplicial. Es decir, pasamos a hablar de homomorfismos inducidos por morfismos entre los espacios de partida. En este caso los morfismos a considerar son aplicaciones continuas. Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación continua entre espacios topológicos, definimos $f_\# : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ con la ecuación $f_\#(T) = f \circ T$. De la misma forma que en la Definición 2.1.3, lo hemos definido para cada n -símplice singular, con lo que está definido para todo elemento en $S_n(X)$. Para ver que está bien definida basta observar que la composición de aplicaciones continuas es continua.

Lema 2.1.4. El homomorfismo $f_\#$ conmuta con ∂ . Esto implica que $\partial^2 = 0$.

Demostración. La primera afirmación viene de una comprobación directa, sea T un n -símplice singular

$$\begin{aligned} \partial f_\#(T) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i (f \circ T) \circ l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n) \\ f_\#(\partial T) &= \sum_{i=0}^n (-1)^i f \circ (T \circ l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n)) \end{aligned}$$

Para la segunda, primero calculamos ∂ para símlices singulares lineales.

$$\partial l(a_0, \dots, a_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i l(a_0, \dots, a_n) \circ l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \widehat{\epsilon}_i, \dots, \epsilon_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i l(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n)$$

El que $\partial \partial(a_0, \dots, a_n) = 0$ se demuestra exactamente igual que en el caso simplicial:

$$\begin{aligned} \partial \partial l(a_0, \dots, a_n) &= \partial \left(\sum_{i=0}^n (-1)^i l(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n) \right) = \sum_{i=0}^n \sum_{j < i} (-1)^j (-1)^i l(a_0, \dots, \widehat{a}_j, \dots, \widehat{a}_i, \dots, a_n) + \\ &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j > i} (-1)^{j-1} (-1)^i l(a_0, \dots, \widehat{a}_i, \dots, \widehat{a}_j, \dots, a_n) = 0 \end{aligned}$$

donde tenemos que los términos de los sumatorios son iguales dos a dos pero con distinto signo. El resultado general de que $\partial^2 T = 0$ para cualquier n -símplice singular viene de que $T = T_\#(l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n))$, ya que $l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ es la identidad en Δ^n y, como $T_\#$ conmuta con ∂ , tenemos $\partial \partial T = \partial \partial (T_\#(l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n))) = T_\# \partial \partial (l(\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_n)) = 0$ \square

Con una demostración idéntica a la del Lema 1.2.7 tenemos que $f_\#$ induce un homomorfismo $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$. Hasta ahora todo han sido pegadas en comparación al caso simplicial, sin embargo ya podemos empezar a hacer cosas con la homología singular que en el caso simplicial resultan no triviales. Lo primero, podemos probar que los grupos de homología singulares son un functor covariante.

Teorema 2.1.5. Sea $i : X \rightarrow X$ la identidad, entonces $i_* : H_n(X) \rightarrow H_n(X)$ es la identidad. Sean $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow Z$ funciones continuas, se cumple que $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.

Demostración. Para la primera afirmación, es claro que $i_{\#}(T) = i \circ T = T$ por lo que i_* también es la identidad. Para la segunda, $(g \circ f)_{\#}(T) = (g \circ f) \circ T = g \circ (f \circ T) = g_{\#}(f_{\#}(T))$, con lo que tenemos que inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología. \square

Corolario 2.1.6. Si $f : X \rightarrow Y$ es un homeomorfismo, $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ es un isomorfismo.

Demostración. Si f es un homeomorfismo, existe f^{-1} tal que $f^{-1} \circ f = i_X$, donde i_X es la identidad en X ; de la misma forma que $f \circ f^{-1} = i_Y$, donde i_Y es la identidad en Y . Con esto tenemos que $f_*^{-1} \circ f_* = (f^{-1} \circ f)_* = (i_X)_* = i_{X*}$ y que $f_* \circ f_*^{-1} = (f \circ f^{-1})_* = (i_Y)_* = i_{Y*}$, por ello f_* y f_*^{-1} son homomorfismos con inversa y por lo tanto son isomorfismos. \square

Con esto tenemos que los grupos de homología son invariantes topológicos. Sin embargo, también es cierto que los grupos de homología son invariantes homotópicos, esto es, que espacios homotópicamente equivalentes tienen grupos de homología isomorfos. Con el objetivo de probar este importante resultado, empezamos recordando la definición de homotopía de funciones.

Definición 2.1.7. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Decimos que f y g son **homótopas**, y lo denotamos por $f \sim g$, si existe una aplicación continua $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ y $F(x, 1) = g(x)$, donde $I = [0, 1] \in \mathbb{R}$.

Y también recordemos la definición de espacios homotópicamente equivalentes.

Definición 2.1.8. Dos espacios topológicos X e Y se dicen homotópicamente equivalentes si existen aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \sim i_X$ y $f \circ g \sim i_Y$, donde i_X e i_Y denotan la aplicación identidad en X y en Y .

Lo complicado de probar para ver la invarianza homotópica es el siguiente resultado, que nos dice que, si dos aplicaciones continuas son homótopas entonces inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología. La demostración de este resultado y sus consecuencias son del Capítulo 2 de [12], pág. 110-118.

Proposición 2.1.9. Si dos aplicaciones $f, g : X \rightarrow Y$ son homótopas tenemos que inducen el mismo homomorfismo entre los grupos de homología singular de X e Y .

Demostración. La idea principal en esta demostración es subdividir $\Delta^n \times I$ en símlices. Sea $\Delta^n \times \{0\} = [v_0, \dots, v_n]$ y $\Delta^n \times \{1\} = [w_0, \dots, w_n]$, donde v_i y w_i tienen la misma imagen por la proyección naturalmente definida $\pi : \Delta^n \times I \rightarrow \Delta^n$. Ahora consideramos la familia de símlices geométricos generados por vértices de $[v_0, \dots, v_n]$ y $[w_0, \dots, w_n]$ de la siguiente forma: primero tomamos los primeros n vértices en $[v_0, \dots, v_n]$ y tomamos como último vértice w_n , por lo que tenemos que el primer símplex de esta familia es el generado por $[v_0, \dots, v_{n-1}, w_n]$. Para el siguiente símplex "quitamos" v_{n-1} y le sustituimos por w_{n-1} . De esta manera, el símplex i -ésimo de esta familia surge de cambiar v_i por w_i en el símplex $(i-1)$ -ésimo. Por construcción, tenemos que en el paso i -ésimo la región entre el símplex $(i-1)$ -ésimo y el i -ésimo es el $(n+1)$ -símplex generado por $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$. Con esto tenemos que $\Delta^n \times I$ es la unión de todos los $(n+1)$ -símlices generados por $[v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n]$ donde está claro que la intersección de uno y el siguiente es un n -símplex.

Dada una homotopía $F : X \times I \rightarrow Y$ de f y g y un n -símplex singular T podemos formar la composición $F \circ (T \times i_I) : \Delta^n \times I \rightarrow X \times I \rightarrow Y$. Con esto podemos definir los operadores prisma $P : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)$ como

$$P(T) = \sum_i (-1)^i F \circ (T \times i_I) \circ l(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n)$$

Veamos que estos operadores prisma cumplen $\partial P = g_{\#} - f_{\#} - P\partial$. Geométricamente, el lado izquierdo de la igualdad representa el borde del prisma $\Delta^n \times I$ y los términos de la derecha representan el

parte superior $\Delta^n \times \{1\}$, la inferior $\Delta^n \times \{0\}$ y los laterales $\partial\Delta^n \times I$. Para probar la igualdad calculamos

$$\begin{aligned} \partial P(T) &= \sum_{j \leq i} (-1)^i (-1)^j F \circ (T \times i_I) \circ l(v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_p) + \\ &+ \sum_{j \geq i} (-1)^i (-1)^{j+1} F \circ (T \times i_I) \circ l(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_p) \end{aligned}$$

Nótese que se está usando que $l(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, w_n) \circ l(\epsilon_0, \dots, \widehat{\epsilon}_j, \dots, \epsilon_{n+1}) = l(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_n)$ (en el caso de que $i < j$, análogo para $i > j$). Los términos con $i = j$ se cancelan unos con otros excepto $F \circ (T \times i_I) \circ l(\widehat{v}_0, w_0, \dots, w_n)$, el cual es $g \circ T = g_{\#}T$, y $-F \circ (T \times i_I) \circ l(v_0, \dots, v_n, \widehat{w}_n)$, el cual es $-f \circ T = -f_{\#}(T)$. Los términos con $i \neq j$ son iguales a $-P\partial$ porque

$$\begin{aligned} P\partial &= \sum_{i < j} (-1)^i (-1)^j F \circ (T \times i_I) \circ l(v_0, \dots, v_i, w_i, \dots, \widehat{w}_j, \dots, w_p) + \\ &+ \sum_{i > j} (-1)^{i-1} (-1)^j F \circ (T \times i_I) \circ l(v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_i, w_i, \dots, w_p) \end{aligned}$$

Tenemos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{ccc} & & S_{p+1}(Y) \\ & \nearrow P & \downarrow \partial \\ S_p(X) & \xrightarrow{f_{\#}, g_{\#}} & S_p(Y) \end{array}$$

Ahora tenemos que si $\alpha \in S_n(X)$ es un ciclo, entonces tenemos que $g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha) = \partial P(\alpha) + P\partial(\alpha) = \partial P(\alpha)$ por ser $\partial\alpha = 0$. De esta manera tenemos que $g_{\#}(\alpha) - f_{\#}(\alpha)$ es un borde y por ello $f_*([\alpha]) - g_*([\alpha]) \in B_n(Y)$ por lo que son idénticas como aplicaciones. \square

Definición 2.1.10. Sean $f, g : X \rightarrow Y$ dos aplicaciones continuas. Una **homotopía de cadenas** es una sucesión de homomorfismos $P_n : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(Y)$ tal que, para cada n , se cumple que $\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}$.

Teorema 2.1.11. Sean X e Y dos espacios topológicos homotópicamente equivalentes. Se cumple que $H_p(X) \cong H_p(Y)$, para todo p .

Demostración. Sabemos que existen aplicaciones $f : X \rightarrow Y$ y $g : Y \rightarrow X$ tales que $g \circ f \sim i_X$ y $f \circ g \sim i_Y$, por lo que $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = i_{X*}$ y que $f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = i_{Y*}$ con lo que $f_*^{-1} = g_*$ y tenemos que f_* y g_* son isomorfismos. \square

Este resultado se puede extender a homología relativa. La forma de definir la homología singular relativa es análoga al caso simplicial. Sea $A \subset X$, definimos $S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A)$. Como $\partial_n(S_n(A)) \subset S_{n-1}(A)$, tenemos que los grupos de homología están bien definidos. A estos grupos de homología se les llama **grupos de homología relativa** y se les denota por $H_n(X, A)$. Si tenemos una aplicación $f : X \rightarrow Y$, con $f(A) \subset B$ lo denotaremos por $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$. Diremos que $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homótopas si $f, g : X \rightarrow Y$ son homótopas mediante una homotopía F con $F(A \times I) \subset B$. La aplicación $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ induce un homomorfismo $f_{\#} : S_n(X, A) \rightarrow S_n(Y, B)$. Este homomorfismo está bien definido ya que $f_{\#} : S_n(X) \rightarrow S_n(Y)$ lleva $S_n(A)$ a $S_n(B)$. La relación $f_{\#}\partial = \partial f_{\#}$ se mantiene ya que tan sólo estamos tomando un cociente. Con esta idea en mente, podemos enunciar el siguiente resultado.

Corolario 2.1.12. Si dos aplicaciones $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ son homótopas, entonces $f_* = g_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$.

Demostración. El operador prisma $P : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ asociado a la homotopía lleva, por construcción, $S_n(A)$ en $S_{n+1}(B)$, por lo que induce un operador prisma relativo $P : S_n(X, A) \rightarrow S_{n+1}(Y, B)$. Como tan sólo estamos tomando un cociente, la relación $\partial P + P\partial = g_{\#} - f_{\#}$ sigue siendo válida. Por ello $f_* = g_*$. \square

Este resultado nos dice, en particular, que si A es un retracto de deformación de X , $H_n(X, A) = H_n(A, A) = \{0\}$.

Antes de terminar esta sección vamos a dar un par de propiedades elementales de la homología singular que nos serán de utilidad. La primera de ellas nos dice que los grupos de homología son aditivos con respecto a la unión disjunta de espacios topológicos, como era de esperar.

Proposición 2.1.13. *Sea X un espacio topológico y sea $\{X_\alpha\}$ sus componentes conexas por caminos. Se cumple que $H_n(X) \cong \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha)$.*

Demostración. Como la imagen de un conjunto conexo por caminos es conexa por caminos, tenemos que la imagen de cada n -símplice singular está contenida en un único X_α . Por ello, $S_n(X) = \bigoplus_\alpha S_n(X_\alpha)$. Como el operador borde ∂ preserva esta separación, por estar bien definido al restringirlo a cada $S_n(X_\alpha)$, tenemos que $\ker(\partial)$ y $\text{im}(\partial)$ también se separan como suma directa. Como la suma directa de grupos se porta bien con el cociente, hemos terminado. \square

La siguiente proposición nos dice que $H_0(X)$ detecta cuántas componentes conexas por caminos tiene X . Es un resultado relevante para este trabajo ya que nos dice que los grupos de homología simpliciales y singulares de orden 0 son isomorfos, hecho que usaremos para probar el isomorfismo entre la homología singular y la simplicial.

Proposición 2.1.14. *Sea X un espacio topológico, no vacío. Si es conexo por caminos, $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Esto junto con la proposición 2.1.13 nos dice que si $H_0(X)$ es igual a la suma directa de tantas copias de \mathbb{Z} como componentes conexas por caminos tenga X . Además, si X es un punto, $H_n(X) = \{0\}$ para $n > 0$.*

Demostración. Por definición, $H_0 = S_0(X)/\text{im}(\partial_1)$, por ser $\partial_0 = 0$. Definimos el homomorfismo $\epsilon : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ como $\epsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. Esto es obviamente sobreyectivo por ser $X \neq \emptyset$. Afirmamos que $\ker(\epsilon) = \text{im}(\partial_1)$ si X es conexo por caminos, por lo que ϵ induce un isomorfismo $H_0(X)\mathbb{Z}$ por el primer teorema de isomorfía.

Veamos que es cierta esa afirmación. Para ver que $\text{im}(\partial_1) \subseteq \ker(\epsilon)$, sea $\sigma : \Delta^1 \rightarrow X$ un 1-símplice singular. Tenemos que $\epsilon \partial_1(\sigma) = \epsilon(\sigma(\epsilon_0) - \sigma(\epsilon_1)) = 1 - 1 = 0$. Para la inclusión recíproca, supongamos que $\epsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = 0$, entonces $\sum_i n_i = 0$. Cada σ_i es un 0-símplice singular, por lo que su imágenes tan sólo son puntos de X . Sea $\tau_i : I \rightarrow X$ un camino que va de un punto cualquiera x_0 a $\sigma_i(\epsilon_0)$. Denotaremos por σ_0 el 0-símplice singular que tiene a x_0 como imagen. Podemos ver τ_i como un 1-símplice singular, por construcción es claro que $\partial \tau_i = \sigma_i - \sigma_0$. Por tanto, $\partial(\sum_i n_i \tau_i) = \sum_i n_i \sigma_i - \sum_i n_i \sigma_0 = \sum_i n_i \sigma_i$, por ser $\sum_i n_i = 0$. Entonces $\sum_i n_i \sigma_i$ está en la imagen de ∂_1 .

Para ver la última parte, basta notar que si X es un punto entonces sólo hay un único n -símplice singular σ_n , para cada n . Por ello, $\partial(\sigma_n) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma_{n-1}$, que es igual a 0 si n es impar e igual a σ_{n-1} si n es par. Por esto $\ker(\partial_n) = \text{im}(\partial_{n+1})$ para $n > 0$, lo que nos da el resultado. \square

2.2. Sucesiones exactas

Las sucesiones exactas son un concepto puramente algebraico que nos acompañarán en lo que queda de trabajo, ya que serán una herramienta muy útil. Más precisamente, las sucesiones exactas resultan ser el lenguaje apropiado para hablar de homología relativa, aunque eso lo veremos más adelante. Los contenidos de esta sección son del Capítulo 3 de [15], pág. 130-140.

Definición 2.2.1. Sea $\{A_i, \phi_i\}_{i \in I}$ una sucesión (finita o infinita) de grupos y de homomorfismos:

$$\cdots \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3 \longrightarrow \cdots$$

Se dice que es **exacta** en A_2 si $\text{im}(\phi_1) = \ker(\phi_2)$. Si es exacta en todo término de la sucesión (excepto en el primero y en el último, en caso de que existan), se dice que la sucesión es exacta. En el caso de que el conjunto de índices de la sucesión sean los enteros, se denominan **sucesiones largas exactas**.

En el caso particular de que tengamos la sucesión:

$$0 \xrightarrow{\alpha} A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \xrightarrow{\omega} 0$$

Si es exacta es claro que ϕ debe ser inyectiva, ya que $\ker(\phi) = \operatorname{im}(\alpha) = \alpha(0) = 0$, y que ψ debe ser sobreyectiva, ya que $\operatorname{im}(\psi) = \ker(\omega) = A_3$. Por el resultado conocido como primer teorema de isomorfía tenemos que $A_2/\ker(\psi) \cong A_3$, lo que se traduce en $A_2/\phi(A_1) \cong A_3$. Este tipo de sucesiones se dicen **sucesiones exacta corta**.

Las sucesiones cortas exactas son especialmente interesantes, ya no porque impongan condiciones de inyectividad o sobreyectividad sobre algunos de los homomorfismos sino también por el siguiente concepto. Con ello profundizaremos en la idea de que $A_2/\phi(A_1) \cong A_3$.

Definición 2.2.2. Consideramos la cadena exacta corta

$$0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$$

Decimos que se **escinde** si el grupo $\phi(A_1)$ es un sumando directo de A_2 .

Esto quiere decir que existe otro subgrupo $B \subset A_2$ tal que $A_2 = \phi(A_1) \oplus B$. Con esto tenemos que $\psi|_B : B \rightarrow A_3$ es un isomorfismo, ya que por ser la sucesión exacta sabemos que $\ker(\psi) = \operatorname{im}(\phi) = \phi(A_1)$, por lo que $\ker(\psi|_B) = 0$ y es sobreyectiva. Además es claro que $\phi : A \rightarrow \phi(A)$ es un isomorfismo, por ser ϕ inyectiva. Con esto tenemos que la definición de que una sucesión exacta corta se separe es equivalente a que exista un isomorfismo $\theta : A_2 \rightarrow A_1 \oplus A_3$ que haga conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{\phi} & A_2 & \xrightarrow{\psi} & A_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id_{A_1} & & \downarrow \theta & & \downarrow id_{A_3} & & \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \xrightarrow{i} & A_1 \oplus A_3 & \xrightarrow{\pi} & A_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

El isomorfismo θ se puede construir escribiendo $A_2 = \phi(A_1) \oplus B$ y definiendo θ como ϕ^{-1} en el primer sumando y ψ en el segundo.

Proposición 2.2.3. Sea $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\psi} A_3 \longrightarrow 0$ exacta. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La secuencia se escinde.
2. Existe un homomorfismo $p : A_2 \rightarrow A_1$ tal que $p \circ \phi = id_{A_1}$.
3. Existe un homomorfismo $j : A_3 \rightarrow A_2$ tal que $\psi \circ j = id_{A_3}$.

Demostración. Veamos que (1) implica (2) y (3). Asumiendo que la sucesión se escinde, sabemos que A_2 es naturalmente isomorfo a $A_1 \oplus A_3$. Si definimos $p : A_1 \oplus A_3 \rightarrow A_1$ como la proyección y $j : A_3 \rightarrow A_1 \oplus A_3$ como la inclusión tenemos que (2) y (3) se cumplen.

Veamos que (2) implica (1). Sea $x \in A$, podemos escribir $x = \phi \circ p(x) + (x - \phi \circ p(x))$. El primer término está claramente en $\phi(A_1)$ mientras que el segundo está en $\ker(p)$, ya que $p(x) - p \circ \phi \circ p(x) = p(x) - p(x) = 0$. Para ver que $A_2 = \phi(A_1) \oplus \ker(p)$, nos queda ver que $\phi(A_1) \cap \ker(p) = 0$. Sea $x \in \phi(A_1) \cap \ker(p)$, sabemos que existe un $y \in A_1$ tal que $x = \phi(y)$ y además $p(x) = p \circ \phi(y) = y$, como $x \in \ker(p)$, $y = 0$ y $x = 0$.

Queda demostrar que (3) implica (1). De forma similar a antes, veremos que $A_2 = \ker(\psi) \oplus j(A_3)$. Nótese que esto es equivalente a ver que la sucesión se escinde ya que $\ker(\psi) = \phi(A_1)$ por ser la sucesión exacta. Sea $x \in A_2$, escribimos $x = (x - j \circ \psi(x)) + j \circ \psi(x)$. El primer término está en $\ker(\psi)$ ya que $\psi(x) - \psi \circ j \circ \psi(x) = \psi(x) - \psi(x) = 0$. Es claro que el segundo término está en $j(A_3)$. Para terminar, sea $x \in \ker(\psi) \cap j(A_3)$, entonces $x = j(z)$ para un cierto $z \in A_3$ y $\psi(x) = \psi \circ j(z) = z$; con lo que tenemos que $z = 0$ y $x = 0$. \square

Ahora que hemos profundizado un poco en la importancia de las cadenas cortas exactas, cambiamos un poco de tercio. Como resulta natural, si tenemos una sucesión de grupos, con homomorfismos

entre uno y el siguiente, nada impide que se definan otros homomorfismos que vayan de cada grupo de la sucesión a otro grupo que no sea de la sucesión. Un ejemplo de este caso son las aplicaciones $f_{\#}$ del Lema 2.1.4. Con esta idea, damos la siguiente definición.

Definición 2.2.4. Sean $\mathcal{A} = \{A_i, \phi_i\}_{i \in I}$ y $\mathcal{B} = \{B_i, \psi_i\}_{i \in I}$ dos sucesiones de grupos abelianos, con la misma numeración. Diremos que \mathcal{A} **complejos de cadenas** si $\text{im}(\phi_i) \subseteq \ker(\phi_{i+1})$, para cada $i \in I$ (análogo para \mathcal{B}). Un **homomorfismo** de la primera en la segunda es una familia de homomorfismos de grupos $\alpha_i : A_i \rightarrow B_i$ tales que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_i & \longrightarrow & A_{i+1} \\ \downarrow \alpha_i & & \downarrow \alpha_{i+1} \\ B_i & \longrightarrow & B_{i+1} \end{array}$$

conmuta, para todo i . Se dice que es un **isomorfismo** de sucesiones si cada α_i es un isomorfismo. Podemos definir los **grupos de homología** de \mathcal{A} como $H_n(\mathcal{A}) = \ker(\phi_n) / \text{im}(\phi_{n-1})$, tenemos que se inducen homomorfismos $\alpha_{n*} : H_n(\mathcal{A}) \rightarrow H_n(\mathcal{B})$.

Lema 2.2.5 (Lema zig-zag). Sean $\mathcal{C} = \{C_p, \partial_C\}$, $\mathcal{D} = \{D_p, \partial_D\}$ y $\mathcal{E} = \{E_p, \partial_E\}$ complejos de cadenas. Sean ϕ y ψ homomorfismos de cadenas tales que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{\phi} \mathcal{D} \xrightarrow{\psi} \mathcal{E} \longrightarrow 0$$

es exacta, es decir, es exacta en cada término de cada complejo. Entonces existe una sucesión exacta larga de grupos de homología

$$\cdots \longrightarrow H_p(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi_*} H_p(\mathcal{D}) \xrightarrow{\psi_*} H_p(\mathcal{E}) \xrightarrow{\partial_*} H_{p-1}(\mathcal{C}) \xrightarrow{\phi_*} H_{p-1}(\mathcal{D}) \longrightarrow \cdots$$

donde ∂_* es inducido por el operador ∂_D .

Demostración. Tenemos por hipótesis el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_{p+1} & \xrightarrow{\phi} & D_{p+1} & \xrightarrow{\psi} & E_{p+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_C & & \downarrow \partial_D & & \downarrow \partial_E \\ 0 & \longrightarrow & C_p & \xrightarrow{\phi} & D_p & \xrightarrow{\psi} & E_p \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \partial_C & & \downarrow \partial_D & & \downarrow \partial_E \\ 0 & \longrightarrow & C_{p-1} & \xrightarrow{\phi} & D_{p-1} & \xrightarrow{\psi} & E_{p-1} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Primero definamos ∂_* . Sea e_p un ciclo en E_p , esto es, $e_p \in \ker(\partial_E)$; sea $d_p \in D_p$ tal que $\psi(d_p) = e_p$ (este elemento existe por ser cada fila una sucesión exacta corta, por hipótesis). Tenemos que el elemento $\partial_D d_p$ está en $\ker(\psi)$ porque $\psi(\partial_D d_p) = \partial_E \psi(d_p) = \partial_E e_p = 0$. Como $\ker(\psi) = \text{im}(\phi)$, tenemos que existe un elemento $c_{p-1} \in C_{p-1}$ tal que $\phi(c_{p-1}) = \partial_D d_p$ (y es único por ser ϕ inyectiva). De hecho, $\partial_C c_{p-1} = 0$ porque $\phi(\partial_C c_{p-1}) = \partial_D \phi(c_{p-1}) = \partial_D \partial_D d_p = 0$ y como ϕ es inyectiva esto implica que $\partial_C c_{p-1} = 0$. Definimos entonces $\partial_*[e_p] = [c_{p-1}]$.

Como ∂_* es una aplicación de clases de equivalencia debemos comprobar que está bien definida. Sean e_p y e'_p dos ciclos en E_p tales que $[e_p] = [e'_p]$, debemos comprobar que, necesariamente, $\partial_* e_p = \partial_* e'_p$. Esto significa que existe un $e_{p+1} \in E_{p+1}$ tal que $e_p - e'_p = \partial_E e_{p+1}$. Siguiendo la construcción previa, tomamos d_p y d'_p en D_p tales que $\psi(d_p) = e_p$ y $\psi(d'_p) = e'_p$. Elegimos c_{p-1} y c'_{p-1} en C_{p-1} tales que $\phi(c_{p-1}) = \partial_D d_p$ y que $\phi(c'_{p-1}) = \partial_D d'_p$. Sea $d_{p+1} \in D_{p+1}$ tal que $\psi(d_{p+1}) = e_{p+1}$. Entonces tenemos que $\psi(d_p - d'_p - \partial_D d_{p+1}) = e_p - e'_p - \partial_E \psi(d_{p+1}) = e_p - e'_p - \partial_E e_{p+1} = 0$. Con lo que tenemos que $d_p - d'_p - \partial_D d_{p+1} \in \ker(\psi)$. Usando esto y que ϕ es inyectiva, existe un único elemento c_p tal que $\phi(c_p) = d_p - d'_p - \partial_D d_{p+1}$. Entonces $\phi(\partial_C c_p) = \partial_D \phi(c_p) = \partial_D (d_p - d'_p - \partial_D d_{p+1}) = 0 = \phi(c_{p-1} - c'_{p-1})$. Como ϕ es inyectiva, tenemos que $\partial_C c_p = c_{p-1} - c'_{p-1}$ o, lo que es equivalente, $[c_p] = [c'_{p-1}]$. Con esto hemos probado que ∂_* está bien definida.

Veamos ahora que ∂_* es un homomorfismo. Sean e_p y e'_p elementos (ciclos ambos) en E_p , sean $c_{p-1} = \partial_* e_p$ y $c'_{p-1} = \partial_* e'_p$. Sean d_p y d'_p tales que $\psi(d_p) = e_p$, $\psi(d'_p) = e'_p$, $\phi(c_{p-1}) = \partial_D d_p$

y $\phi(c'_{p-1}) = d'_p$. Por ser ψ homomorfismo, tenemos que $\psi(d_p + d'_p) = e_p + e'_p$. Como ϕ y ∂_D también son homomorfismos, tenemos que $\phi(c_{p-1} + c'_{p-1}) = \partial_D(d_p + d'_p)$. Tenemos entonces que $c_{p-1} + c'_{p-1} = \partial_*(e_p + e'_p)$, ya que cumplen las condiciones impuestas en la construcción de ∂_* y sabemos que sólo hay un elemento en C_{p-1} que las cumpla, es decir, sabemos que ∂_* está bien definida. Con esto tenemos que ∂_* es un homomorfismo de grupos.

Nos queda probar la exactitud de la sucesión larga. Empecemos por probar su exactitud en $H_p(\mathcal{D})$. Sea $\gamma \in H_p(\mathcal{D})$. Notemos que como $\psi \circ \phi = 0$, tenemos que $\psi_* \circ \phi_* = 0$. Por ello, si $\gamma \in \text{im}(\phi_*)$, tenemos que $\psi_*(\gamma) = 0$. Con esto tenemos que $\text{im}(\phi_*) \subset \ker(\psi_*)$. Sea ahora $\gamma = [d_p]$ tal que $\psi_*(\gamma) = 0$. Esto significa que existe un $e_{p+1} \in E_{p+1}$ tal que $\psi(d_p) = \partial_E e_{p+1}$. Sea $d_{p+1} \in D_{p+1}$ tal que $\psi(d_{p+1}) = e_{p+1}$. Entonces $\psi(d_p - \partial_D d_{p+1}) = \psi(d_p) - \partial_E \psi(d_{p+1}) = \psi(d_p) - \partial_E e_{p+1} = 0$. Usando la exactitud en \mathcal{D} , sabemos que existe c_p tal que $\phi(c_p) = d_p - \partial_D d_{p+1}$. Sabemos que c_p es un ciclo porque $\phi(\partial_C c_p) = \partial_D \phi(c_p) = \partial_D d_p - \partial_D \partial_D d_{p+1} = 0$ por ser d_p un ciclo. Tenemos que $\partial_C c_p = 0$ por ser ϕ inyectiva. De hecho, $\phi_*[c_p] = [\phi(c_p)] = [d_p - \partial_D d_{p+1}] = [d_p] = \gamma$ con lo que tenemos que $\gamma \in \text{im}(\phi_*)$ y con esto tenemos la exactitud en $H_p(\mathcal{D})$.

Probemos ahora la exactitud en $H_p(\mathcal{E})$. Sea $\alpha = [e_p]$ un elemento de $H_p(\mathcal{E})$. Sea d_p tal que $\psi(d_p) = e_p$, sea c_{p-1} tal que $\phi(c_{p-1}) = \partial_D d_p$. Por definición, $\partial_* \alpha = [c_{p-1}]$. Supongamos que $\alpha \in \text{im}(\psi_*)$, entonces $\alpha = [\psi(d_p)]$ y tenemos que d_p es un ciclo en D_p . Entonces $\phi(c_{p-1}) = 0$ y, como ϕ es inyectiva, $c_{p-1} = 0$. Con esto tenemos que $\partial_* \alpha = 0$, es decir, que $\alpha \in \ker(\partial_*)$. Supongamos ahora que $\partial_* \alpha = 0$ y veamos que $\alpha \in \text{im}(\psi_*)$. Por hipótesis, existe un c_p tal que $c_{p-1} = \partial_C c_p$. Afirmamos que $d_p - \phi(c_p)$ es un ciclo y que $\alpha = \psi_*[d_p - \phi(c_p)]$, por lo que $\alpha \in \text{im}(\psi_*)$. Probemos ambas afirmaciones con un cálculo directo. $\partial_D(d_p - \phi(c_p)) = \partial_D d_p - \phi(\partial_C c_p) = \partial_D d_p - \phi(c_{p-1}) = 0$, lo que prueba la primera afirmación. Para la segunda, $\psi_*[d_p - \phi(c_p)] = [\psi(d_p) - \psi \circ \phi(c_p)] = [e_p - 0] = \alpha$.

Para terminar la demostración sólo nos queda probar la exactitud en $H_{p-1}(\mathcal{C})$. Sea $\beta \in H_{p-1}(\mathcal{C})$. Supongamos que $\beta \in \text{im}(\partial_*)$, entonces $\beta = [c_{p-1}]$ y existe un cierto d_p tal que $\phi(c_{p-1}) = d_p$, por definición de ∂_* . Entonces $\phi_*(\beta) = [\phi(c_{p-1})] = [\partial_D d_p] = 0$. Supongamos ahora que $\beta \in \ker(\phi_*)$. Entonces, $[\phi(c_{p-1})] = 0$ así que existe un cierto d_p tal que $\partial_D d_p = \phi(c_{p-1})$. Definimos $e_p = \psi(d_p)$, entonces e_p es un ciclo porque $\partial_E e_p = \psi(\partial_D d_p) = \psi \circ \phi(c_{p-1}) = 0$. Por construcción se tiene que $\partial_* e_p = \beta$, con lo que tenemos que $\beta \in \text{im}(\partial_*)$. \square

El Lema zig-zag lo usaremos, mayoritariamente, para hablar de la sucesión exacta larga asociada al par (X, A) . Esto nos dará información sobre los grupos de homología relativa $H_n(X, A)$. La sucesión larga exacta asociada a (X, A) se construye a partir de la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow S_n(A) \longrightarrow S_n(X) \longrightarrow S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A) \longrightarrow 0$$

El que esta sucesión corta es exacta para todo n viene dado por construcción. Por tanto, estamos en condiciones de usar el Lema zig-zag 2.2.5. Con esto hemos demostrado el lema siguiente.

Lema 2.2.6. *Sea X un espacio topológico y sea $A \subset X$. Existe una sucesión exacta larga de la forma:*

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(X, A) \longrightarrow H_n(A) \longrightarrow H_n(X) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow \cdots$$

El siguiente resultado es el 'five lemma' de Steenrod. Este lema nos permitirá próximamente demostrar el ya mencionado isomorfismo entre los grupos de homología simpliciales y singulares.

Lema 2.2.7. *Sea dado un digrama conmutativo de grupos abelianos y homomorfismos como el siguiente:*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 & \xrightarrow{\alpha_4} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 & \xrightarrow{\beta_4} & B_5 \end{array}$$

donde las secuencias horizontales son exactas. Si f_1, f_2, f_4 y f_5 son isomorfismos, también es isomorfismo f_3 .

Demostración. Sea $a_3 \in A_3$ un elemento tal que $f_3(a_3) = 0$, veamos que esto implica que $a_3 = 0$. Sabemos que $0 = \beta_3 \circ f_3(a_3) = f_4 \circ \alpha_3(a_3)$, como f_4 es isomorfismo tenemos que $\alpha_3(a_3) = 0$. Por ello,

existe un a_2 tal que $\alpha_2(a_2) = a_3$. Tomamos $b_2 = f_2(a_2)$. Como $0 = f_3 \circ \alpha_2(a_2) = \beta_2 \circ f_2(a_2)$, tenemos que $\beta_2(b_2) = 0$, por lo que existe un cierto b_1 tal que $\beta_1(b_1) = b_2$. Sabemos, por ser f_1 sobreyectiva, que existe a_1 tal que $f_1(a_1) = b_1$. Denotamos $a'_2 = f_1(a_1)$, veamos que $a'_2 = a_2$. Sabemos que $\beta_1 \circ f_1(a_1) = \beta_1(b_1) = b_2$ y que $\beta_1 \circ f_1(a_1) = f_2 \circ \alpha_1(a_1) = f_2(a'_2)$. Con esto, $f_2(a'_2) = b_2 = f_2(a_2)$ y como f_2 es inyectiva $a_2 = a'_2$. Con esto tenemos que $a_2 \in \text{im}(\alpha_1) = \ker(\alpha_2)$, por lo que $a_3 = \alpha_2(a_2) = 0$ y con esto tenemos probada la inyectividad de f_3 .

Probemos ahora la sobreyectividad de f_3 . Sea $b_3 \in B_3$. Denotemos $b_4 = \beta_3(b_3)$. Sabemos que $\beta_4(b_4) = 0$, por la exactitud en B_4 . Tenemos, además, que existe un a_4 tal que $b_4 = f_4(a_4)$ cumpliendo que $0 = \beta_4 \circ f_4(a_4) = f_5 \circ \alpha_4(a_4)$ y como f_5 es inyectiva tenemos que $\alpha_4(a_4) = 0$. Por ello, existe un cierto a_3 tal que $\alpha_3(a_3) = a_4$. Denotemos $f_3(a_3) = b'_3$. Tenemos que $\beta_3 \circ f_3(a_3) = f_4 \circ \alpha_3(a_3) = b_4$, por lo que $\beta_3(b'_3) = b_4$. Con esto se tiene que $\beta_3(b_3 - b'_3) = 0$. Esto implica que existe un cierto b_2 tal que $\beta_2(b_2) = b_3 - b'_3$ y, a su vez, existe un a_2 tal que $f_2(a_2) = b_2$. Calculamos $f_3(a_3 + \alpha_2(a_2)) = f_3(a_3) + f_3(\alpha_2(a_2)) = b'_3 + \beta_2(f_2(a_2)) = b'_3 + b_3 - b'_3 = b_3$, con lo que concluye la demostración. \square

Si uno se fija en la prueba dada, puede darse cuenta de que en ningún momento se ha usado la inyectividad de f_1 ni la sobreyectividad de f_5 , por lo que el resultado sigue siendo cierto sin esas hipótesis. Así todo, la forma clásica de enunciar este resultado es la que se ha dado.

2.3. Teorema de Excisión. Isomorfismo.

Ahora ya podemos volver a la homología singular. Nuestro objetivo sigue siendo probar el isomorfismo entre la homología singular y simplicial; sin embargo, para ello necesitamos un resultado conocido como el Teorema de Excisión. Ello nos permitirá calcular los grupos de homología singular relativos de Δ^n respecto a $\partial\Delta^n$ y con ellos demostraremos el isomorfismo. El contenido de esta sección es originalmente del Capítulo 2 de [12], pág. 118-130.

Para probar el Teorema de Excisión usaremos, para simplificar su prueba, el concepto de **grupos de homología reducidos**. Sea $\{S_n, \partial_n\}$ el complejo de cadenas singulares de un espacio topológico, construimos el complejo de cadenas

$$\cdots \longrightarrow S_2 \xrightarrow{\partial_2} S_1 \xrightarrow{\partial_1} S_0 \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Donde $\epsilon(\sum_i n_i \sigma_i) = \sum_i n_i$. En 2.1.14 se probó que $\text{im}(\partial_1) \subset \ker(\epsilon)$. A esta construcción se le llama complejo de cadenas **augmentado** y a los grupos de homología asociados se les llama grupos de homología reducidos, los denotaremos por $\tilde{H}_n(X)$. Es obvio que $H_n(X) = \tilde{H}_n(X)$ si $n > 0$. Si $n = 0$, como ϵ se anula en $\text{im}(\partial_1)$ y es epimorfismo, induce un homomorfismo sobreyectivo de $H_0(X)$ en \mathbb{Z} cuyo núcleo es $\tilde{H}_0(X)$. Esto nos dice que $H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \tilde{H}_0(X)$.

A continuación vamos a dar una demostración de un resultado bastante técnico y, antes de meternos en faena, vamos a introducir algo de notación. Para un espacio topológico X , sea $\mathcal{U} = \{U_j\}$ una familia de subespacios de X tales que sus interiores forman un recubrimiento abierto de X . Sea $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ el subgrupo de $S_n(X)$ formado por las cadenas $\sum_i n_i \sigma_i$ tales que la imagen de cada σ_i está contenida en un cierto U_j . El operador borde $\partial : S_n(X) \rightarrow S_{n-1}(X)$ manda $S_n^{\mathcal{U}}$ a $S_{n-1}^{\mathcal{U}}$, así que los grupos $S_n^{\mathcal{U}}$ forman un complejo de cadenas, tomando como homomorfismos las correspondientes restricciones del operador borde. Denotamos a los grupos de homología de este complejo de cadenas como $H_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Lema 2.3.1. *La inclusión $\tau : S_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_n(X)$ es una equivalencia homotópica de cadenas, esto es, existe un $\rho : S_n(X) \rightarrow S_n^{\mathcal{U}}(X)$ tal que $\tau\rho$ y $\rho\tau$ son homótopas a la identidad. Por tanto τ induce un isomorfismo $H_n^{\mathcal{U}}(X) \cong H_n(X)$, para todo n .*

Demostración. Sea τ hará mediante un procedimiento conocido como **subdivisión baricéntrica**. La prueba se divide en cuatro partes.

1.- Subdivisión baricéntrica de símplexes. Los puntos de un n -símplex $[v_0, \dots, v_n]$ son las combinaciones lineales $\sum_i t_i v_i$ tal que $\sum_i t_i = 1$ y $t_i \geq 0$ para cada i . El baricentro del símplex es el

punto $b = \sum_i t_i v_i$ donde las coordenadas t_i son iguales, es decir, $t_i = 1/(n+1)$. La subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ es la descomposición del símple en n -símples de la forma $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ donde, por inducción, $[w_0, \dots, w_{n-1}]$ es un $(n-1)$ -símple de la subdivisión baricéntrica de una cara $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. La inducción empieza con el caso $n=0$ donde la subdivisión baricéntrica de $[v_0]$ es $[v_0]$. Si consideramos los n -símples resultantes de calcular la subdivisión baricéntrica de Δ^n , junto con sus respectivas caras, tenemos de hecho un complejo simplicial. Sin embargo, como no necesitamos este resultado no lo vamos a probar. En su lugar, lo que sí necesitamos es que el diámetro de cada n -símple resultante de la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$ es, a lo sumo, $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$. Se sobreentiende que el diámetro de un símple es la máxima distancia entre dos puntos del símple, respecto a la norma euclídea. De hecho, el diámetro de un símple es igual al máximo de las distancias entre vértices ya que

$$\|v - \sum_i t_i v_i\| = \|\sum_i t_i (v - v_i)\| \leq \sum_i t_i \|v - v_i\| \leq \sum_i t_i \max_j \{\|v - v_j\|\} = \max_j \{\|v - v_j\|\}$$

Lo cual nos simplifica la prueba de la existencia de esa cota. Procederemos por inducción. Como el resultado resulta trivial para $n=0$, pasamos al paso de inducción. Suponemos que los símples de la forma $[b', w'_0, \dots, w'_{n-2}]$ resultantes de hacer la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ tienen diámetro menor o igual a $(n-1)/n$ veces el diámetro de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. Consideramos $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$ un símple resultante de hacer la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$. Queremos calcular la distancia entre dos vértices cualesquiera de $[b, w_0, \dots, w_{n-1}]$. Si tomamos dos vértices w_j y w_k distintos de b , tenemos que pertenecen a un símple resultante de hacer la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, por lo que el resultado es cierto por inducción. Por lo tanto, ahora queda probar que la distancia de b con respecto cualquier w_j cumple la cota. Por la desigualdad previamente probada, basta probar que la distancia de b a cada v_i es menor o igual que $n/(n+1)$ veces el diámetro de $[v_0, \dots, v_n]$. Sea b_i el baricentro de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$. Sabemos que las coordenadas baricéntricas de b_i en $[v_0, \dots, v_n]$ son iguales a $1/n$ excepto la i -ésima que es 0. Tenemos entonces que $b = \frac{1}{n+1} v_i + \frac{n}{n+1} b_i$. Como la suma de los dos coeficientes es 1, tenemos que b está en el segmento que une b_i con v_i , donde la distancia de b a v_i es $n/(n+1)$ veces la distancia de v_i a b_i . Con esto tenemos que la distancia de b a v_i está acotada como queríamos.

La relevancia del factor $n/(n+1)$ es que cada vez que hacemos la subdivisión baricéntrica obtenemos símples de menor diámetro, es decir, haciéndola r veces tenemos que los símples tienen diámetro menor o igual a $(n/(n+1))^r$. Es claro que esta cota converge a 0 al crecer r .

2.- Subdivisión baricéntrica de cadenas (afines). En esta parte de la prueba se construye un operador "subdivisión" $S : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$ y mostramos que este operador es homótopo a la identidad.

Sea Y un conjunto convexo en un espacio euclídeo. Las aplicaciones afines $\Delta^n \rightarrow Y$ generan un subgrupo de $S_n(Y)$ que denotaremos como $LS_n(Y)$, el grupo de cadenas afines. Como la composición de aplicaciones afines es afín y la combinación lineal de aplicaciones afines es afín, tenemos que el operador borde $\partial : S_n(Y) \rightarrow S_{n-1}(Y)$ lleva $LS_n(Y)$ a $LS_{n-1}(Y)$. Por lo tanto, las cadenas afines forman un subcomplejo del complejo de cadenas singulares de Y . Sabemos que se puede caracterizar una aplicación afín $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$ por $[w_0, \dots, w_n]$, donde cada w_i es la imagen del vértice i -ésimo de Δ^n a través de λ . Para evitar tener que hacer excepciones para los 0-símples se considera el complejo aumentado, es decir, $LS_{-1}(Y) = \mathbb{Z}$ el grupo libre generado por el símple vacío $[\emptyset]$, con $\partial[w_0] = [\emptyset]$ para cualquier 0-símple.

Cada punto $b \in Y$ determina un homomorfismo $\bar{b} : LS_n(Y) \rightarrow LS_{n+1}(Y)$ definido sobre cada elemento generador de $LS_n(Y)$ como $\bar{b}([w_0, \dots, w_n]) = [b, w_0, \dots, w_n]$. Geométricamente es como si estuviésemos construyendo un cono, donde b es el vértice y $[w_0, \dots, w_n]$ es la base. Mediante la definición de ∂ , tenemos que $\partial \bar{b}([w_0, \dots, w_n]) = [w_0, \dots, w_n] - \bar{b}(\partial[w_0, \dots, w_n])$. Por linealidad, tenemos que $\partial \bar{b}(\alpha) = \alpha - \bar{b}(\partial \alpha)$, para todo $\alpha \in LS_{n+1}(Y)$. Esta relación puede escribirse como $\partial \bar{b} + \bar{b} \partial = id$, así que \bar{b} es una homotopía de cadenas entre la identidad y el homomorfismo nulo en la cadena aumentada $LC(Y)$.

Ahora definimos un homomorfismo subdivisión $S : LS_n(Y) \rightarrow LS_n(Y)$ por inducción en n . Sea $\lambda : \Delta^n \rightarrow Y$ un generador de $LS_n(Y)$ y sea b_λ la imagen del baricentro de Δ^n a través de λ . Definimos $S(\lambda) = \bar{b}_\lambda(S\partial\lambda)$, donde \bar{b}_λ es el operador asociado a b_λ descrito previamente. La inducción empieza con $S([\emptyset]) = [\emptyset]$, por lo que es la identidad en $LS_{-1}(Y)$. De hecho, también es la identidad en $LS_0(Y)$, ya que para $n=0$ la fórmula para S toma la forma $S([w_0]) = w_0(S\partial[w_0]) = w_0(S([\emptyset])) = w_0([\emptyset]) = [w_0]$. Comprobemos que las aplicaciones S cumplen que $\partial S = S\partial$ y que entonces es un homomorfismo de cadenas de $LS(Y)$ en sí mismo. Como $S = id$ en $LS_0(Y)$ y en

$LS_{-1}(Y)$, resulta trivial el que $\partial S = S\partial$ para $LS_0(Y)$. Supongamos que es cierto para $LS_{n-1}(Y)$ y probémoslo para $LS_n(Y)$. Para ello basta hacer cuentas:

$$\partial S\lambda = \partial b_\lambda(S\partial\lambda) = S\partial\lambda - b_\lambda\partial(S\partial\lambda) =_1 S\partial\lambda - b_\lambda S(\partial\partial\lambda) = S\partial\lambda$$

Donde en la igualdad " $=_1$ " se ha usado la hipótesis de inducción; en el resto de igualdades se usan propiedades que ya sabíamos de b_λ y que $\partial^2 = 0$. Ahora construimos una homotopía de cadenas $T : LS_n(Y) \rightarrow LS_{n+1}(Y)$ entre S y la identidad en $LS_n(Y)$. Definimos T en $LS_n(Y)$ como $T = 0$ si $n = -1$ y $T\lambda = b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda)$ para $n \geq 0$. El que $\partial T + T\partial = id - S$ es trivial para LC_{-1} , donde $T = 0$ y $S = id$. Ahora se demuestra que la igualdad es cierta para todo n por inducción:

$$\begin{aligned} \partial T\lambda &= \partial b_\lambda(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda\partial(\lambda - T\partial\lambda) = \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[\partial\lambda - \partial T(\partial\lambda)] =_2 \\ &= \lambda - T\partial\lambda - b_\lambda[S(\partial\lambda) + T\partial(\partial\lambda)] = \lambda - T\partial\lambda - S\lambda \end{aligned}$$

Donde se ha usado la hipótesis de inducción en " $=_2$ ". Ahora podemos olvidarnos de $LS_{-1}(Y)$ dado que la relación $\partial T + T\partial = id - S$ sigue siendo cierta por ser $T = 0$ en $LC_{-1}(Y)$.

Antes de seguir, vamos a dar una pequeña visión geométrica de lo que hace S en un caso particular, lo necesitaremos en el siguiente paso de la demostración. Vamos a considerar el caso de que $Y = \Delta^n$ y λ es un embebimiento, esto es, $\lambda(\Delta^n) = [v_0, \dots, v_n]$ es un símplice (geométrico). Veamos que en este caso $S(\lambda)$ es igual a una combinación lineal de los símplices resultantes de hacer la subdivisión baricéntrica de Δ^n . Para el caso $n = 1$, $\lambda = [v_0, v_1]$ por lo que

$$S(\lambda) = b(S\partial\lambda) = b(S([w_1] - [w_0])) = b([w_1] - [w_0]) = [b, w_1] - [b, w_0]$$

con lo que el resultado es cierto. Supongamos que es cierto hasta $n - 1$ y calculemos el caso n -ésimo

$$S(\lambda) = b(S\partial\lambda) = b(S([v_1, \dots, v_n] - [v_0, v_2, \dots, v_n] + \dots + (-1)^n[v_0, \dots, v_{n-1}]))$$

Por hipótesis de inducción, sabemos que $S([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n])$ es combinación de símplices resultantes de hacer la división baricéntrica de $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$, es decir, es una combinación de símplices de la forma $[b_{n-1}, w_0, \dots, w_{n-2}]$. Al hacer $b(S([v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]))$, como es lineal, podemos ver cómo es la imagen de cada término. De hecho, $b([b_{n-1}, w_0, \dots, w_{n-2}]) = [b, b_{n-1}, w_0, \dots, w_{n-2}]$ por lo tanto tenemos que $S(\lambda)$ es una combinación lineal (con coeficientes ± 1) de símplices resultantes de hacer la subdivisión baricéntrica de $[v_0, \dots, v_n]$.

3.- Subdivisión baricéntrica de cadenas (caso general). Definimos $S : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$ como $S\sigma = \sigma_\# S\Delta^n$ para cada n -símplice singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$. Aquí $S\Delta^n$ quiere decir que se ha tomado, siguiendo la notación del apartado previo, $Y = \Delta^n$ y $\lambda = id_{\Delta^n}$, por lo que $S\Delta^n$ es la suma de los n -símplices resultantes de hacer la subdivisión baricéntrica de Δ^n , con unos ciertos signos que no nos importan. Por ello, $S\sigma$ es una suma de las restricciones de σ a dichos n -símplices de la subdivisión baricéntrica de Δ^n . El operador S es un homomorfismo de cadenas ya que

$$\begin{aligned} \partial S\sigma &= \partial\sigma_\# S\Delta^n = \sigma_\# \partial S\Delta^n = \sigma_\# S\partial\Delta^n = \sigma_\# S(\sum_i (-1)^i \Delta_i^n) = \sum_i (-1)^i \sigma_\# S(\Delta_i^n) = \\ &= \sum_i (-1)^i S(\sigma|_{\Delta_i^n}) = S(\sum_i (-1)^i \sigma|_{\Delta_i^n}) = S(\partial\sigma) \end{aligned}$$

Donde Δ_i^n denota la cara i -ésima de Δ^n . Siguiendo la misma notación, definimos $T : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ como $T\sigma = \sigma_\# T\Delta^n$. Este operador T es una homotopía de cadenas entre S y la identidad ya que

$$\partial T\sigma = \partial\sigma_\# T\Delta^n = \sigma_\# \partial T\Delta^n = \sigma_\# (\Delta^n - S\Delta^n - T\partial\Delta^n) = \sigma - S\sigma - \sigma_\# T\partial\Delta^n = \sigma - S\sigma - T(\partial\sigma)$$

donde la última igualdad es cierta ya que si en la prueba de que $\partial S = S\partial$ se sustituye la S por la T , la prueba sigue siendo válida.

4.- Subdivisión baricéntrica iterada. Si definimos $D_m = \sum_{0 \leq i < m} TS^i$ tenemos que es una homotopía de cadenas entre S^m y la identidad, considerando $S^0 = id$. Efectivamente,

$$\begin{aligned} \partial D_m + D_m\partial &= \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + TS^i\partial) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial TS^i + T\partial S^i) = \sum_{0 \leq i < m} (\partial T + T\partial)S^i = \\ &= \sum_{0 \leq i < m} (id - S)S^i = \sum_{0 \leq i < m} (S^i - S^{i+1}) = id - S^m \end{aligned}$$

Para cada n -símplice singular $\sigma : \Delta^n \rightarrow X$ existe un m tal que $S^m(\sigma)$ está en $S_n^u(X)$ ya que el diámetro de los símplices de $S^m(\Delta^n)$ serán menores que el número de Lebesgue del recubrimiento

abierto de Δ^n dado por los abiertos $\sigma^{-1}(\text{int}U_j)$, para un m lo bastante grande. Recuerdese que el número de Lebesgue de un recubrimiento abierto de un espacio métrico compacto es un valor $\epsilon > 0$ tal que todo conjunto de diámetro menor que ϵ está contenido en algún conjunto del recubrimiento (la existencia del número de Lebesgue se conoce con el nombre de "lema del número de Lebesgue"). Como, en un principio, m depende del símple singular escogido, definimos $m(\sigma)$ como el valor más pequeño que nos sirve, es decir, tal que $S^m\sigma$ está en $D_n^{\mathcal{U}}$. Ahora definimos $D : S_n(X) \rightarrow S_{n+1}(X)$ como $D\sigma = D_{m(\sigma)}\sigma$ para cada n -símple singular. Ahora buscamos un homomorfismo de cadenas $\rho : S_n(X) \rightarrow S_n(X)$ con imagen en $S_n^{\mathcal{U}}$ que satisfaga la ecuación propia de una homotopía de cadenas:

$$\partial D + D\partial = id - \rho$$

Una manera sencilla de conseguir esto es definiendo directamente $\rho = id - \partial D - D\partial$. Esta forma de definir ρ nos da un homomorfismo de cadenas ya que

$$\partial\rho(\sigma) = \partial\sigma - \partial^2 D\sigma - \partial D\partial\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma$$

Y

$$\rho\partial(\sigma) = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma - D\partial^2\sigma = \partial\sigma - \partial D\partial\sigma$$

Por lo que nos queda comprobar que ρ lleva $S_n(X)$ a $S_n^{\mathcal{U}}(X)$. Para ello, hacemos unas cuentas

$$\begin{aligned} \rho(\sigma) &= \sigma - \partial D\sigma - D\partial\sigma = \sigma - \partial D_{m(\sigma)}\sigma - D\partial\sigma = \sigma - (\sigma - S^{m(\sigma)} - D_{m(\sigma)})\partial\sigma - D\partial\sigma = \\ &= S^{m(\sigma)} + D_{m(\sigma)}\partial\sigma - D\partial\sigma \end{aligned}$$

El término $S^{m(\sigma)}\sigma$ está en $S_n^{\mathcal{U}}(X)$ por definición de $m(\sigma)$. Los otros términos son combinaciones lineales de términos de la forma $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$ siendo σ_j la restricción de σ a la cara j -ésima de Δ^n . Por esto es claro que $m(\sigma_j) \leq m(\sigma)$ y entonces $D_{m(\sigma)}(\sigma_j) - D_{m(\sigma_j)}(\sigma_j)$ consiste de términos de la forma $TS^i(\sigma_j)$ con $i \geq m(\sigma_j)$. Como T lleva $C_{n-1}^{\mathcal{U}}(X)$ a $C_n^{\mathcal{U}}(X)$ tenemos que $TS^i(\sigma_j)$ con $i \geq m(\sigma_j)$ está en $C_n^{\mathcal{U}}(X)$.

Si ahora vemos ρ como un homomorfismo de cadenas $S_n(X) \rightarrow S_n^{\mathcal{U}}(X)$, tenemos que $\partial D + D\partial = id - \tau\rho$; recordemos que $\tau : S_n^{\mathcal{U}}(X) \rightarrow S_n(X)$ es la inclusión. Además, $\rho\tau = id$ ya que D es el homomorfismo nulo en $S_n^{\mathcal{U}}$, por ser $m(\sigma) = 0$ si $\sigma \in S_n^{\mathcal{U}}(X)$ y, entonces, $D\sigma$ es la suma vacía. Tenemos entonces que ρ es una inversa homotópica de cadenas de τ . \square

Este resultado tan técnico resulta fundamental, ya que nos dice lo que pasa en los grupos de homología cuando consideramos un recubrimiento abierto de X . El siguiente teorema traduce este resultado a términos más manejables.

Teorema 2.3.2 (Teorema de Excisión). *Sea X un espacio topológico, sean A y Z subespacios tales que $Z \subset A \subset X$. También exigimos que la clausura de Z esté contenida en el interior de A . Entonces la inclusión naturalmente definida de $(X - Z, A - Z) \rightarrow (X, A)$ induce un isomorfismo $H_n(X - Z, A - Z) \rightarrow H_n(X, A)$, para todo n . Equivalentemente, sean A y B subespacios de X tales que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$. La inclusión $(B, A \cap B) \rightarrow (X, A)$ induce isomorfismos $H_n(B, A \cap B) \rightarrow H_n(X, A)$, para todo n .*

Demostración. Primero de todo, el que ambos resultados sean equivalentes viene dado al tomar $B = X - Z$ y $Z = X - B$. Entonces $A \cap B = A - Z$ y la condición de que $cl(Z) \subset \text{int}(A)$ es equivalente a que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$, por ser $X - \text{int}(B) = cl(Z)$. Probaremos la segunda versión.

Para el recubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{A, B\}$ introducimos la notación $S_n(A + B)$ para $S_n^{\mathcal{U}}$; lo que representa de forma más explícita que tomamos la suma de cadenas en A y cadenas en B . Al final de la prueba del Lema 2.3.1 teníamos las igualdades $\partial D + D\partial = id - \tau\rho$ y $\rho\tau = id$. Todas estas aplicaciones mandan cadenas en A a cadenas en A , por lo que al tomar el cociente entre $S_n(A)$ tenemos que inducen homomorfismos bien definidos. Como estos homomorfismos inducidos entre cocientes siguen cumpliendo ambas igualdades, tenemos que la inclusión $S_n(A + B)/S_n(A) \rightarrow S_n(X)/S_n(A)$ induce un isomorfismo entre los grupos de homología correspondientes. La aplicación $S_n(B)/S_n(A \cap B) \rightarrow S_n(A + B)/S_n(A)$ inducida por la inclusión es un isomorfismo ya que ambos grupos cociente son libres y están generados por los n -símples singulares en B que no están en A . Con esto tenemos el isomorfismo que queríamos, $H_n(B, A \cap B) \cong H_n(X, A)$. \square

Proposición 2.3.3. Diremos que un par (X, A) es **bueno** si A es un subespacio cerrado de X que es retracts de deformación de un abierto. Bajo esta hipótesis, la aplicación cociente $q : (X, A) \rightarrow (X/A, A/A)$ induce isomorfismos $q_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(X/A, A/A) \cong \tilde{H}_n(X/A)$ para todo n .

Demostración. Sea V un entorno de A en X tal que A es retracts de deformación de V . Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X, A) & \longrightarrow & H_n(X, V) & \longleftarrow & H_n(X - A, V - A) \\ \downarrow q_* & & \downarrow q_* & & \downarrow q_* \\ H_n(X/A, A/A) & \longrightarrow & H_n(X/A, V/A) & \longleftarrow & H_n(X/A - A/A, V/A - A/A) \end{array}$$

Para ver que el homomorfismo horizontal superior izquierdo es un isomorfismo, consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow C_n(V, A) \longrightarrow C_n(X, A) \longrightarrow C_n(X, V) \longrightarrow 0$$

Que es válida para todo n , por lo que es una sucesión exacta corta de complejos de cadenas. Por el Lema zig-zag 2.2.5, esto induce una secuencia exacta larga de la forma

$$\cdots \longrightarrow H_n(V, A) \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, V) \longrightarrow H_{n-1}(V, A) \longrightarrow \cdots$$

A esta construcción se le llama sucesión exacta larga asociada a la terna (X, V, A) . Como A es un retracts de deformación de V , tenemos que $H_n(V, A) \cong H_n(A, A) = 0$ por lo tanto tenemos que la sucesión exacta larga está formada por grupos de la forma

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_n(X, A) \longrightarrow H_n(X, V) \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Por lo que $H_n(X, A) \cong H_n(X, V)$. Lo mismo aplica para ver que $H_n(X/A, A/A) \cong H_n(X/A, V/A)$ ya que el que A sea retracts por deformación de V induce que A/A es retracts por deformación de V/A . Los otros dos homomorfismos horizontales son isomorfismos por el Teorema de Excisión 2.3.2, de forma directa. El homomorfismo vertical de la derecha es un isomorfismo ya que q es un homeomorfismo en el complementario de A , por definición. Por ser el diagrama conmutativo tenemos que los otros homomorfismos verticales son también isomorfismos. \square

Ejemplo 2.3.4. Vamos a usar toda esta teoría que hemos desarrollado para calcular los grupos de homología singulares de un caso particular. Vamos a comprobar que $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ es un grupo libre generado por la identidad $i_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$. Lo haremos por inducción sobre n .

Hagamos el caso con $n = 0$. Recordemos que $\partial\Delta^0 = \emptyset$. Es claro que la identidad $i_0 : \Delta^0 \rightarrow \Delta^0$ es un generador de $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0)$ ya que es la única función que puede definirse de Δ^0 en Δ^0 y claramente $\partial_0 id_0 = 0$, por definición de ∂_0 . Básicamente tenemos que $S_n(\Delta^0, \partial\Delta^0) = \langle i_0 \rangle$ y $\partial_n = 0$, para todo n . Esto nos dice que $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) = \langle [i_0] \rangle \cong \mathbb{Z}$, por lo que tenemos que es un grupo libre con un único generador.

Para el caso general, primero nótese que la identidad $i_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ es un ciclo ya que estamos considerando los grupos de homología relativa y, por definición del operador borde, $\partial_n i_n \in S_{n-1}(\partial\Delta^n)$. Veamos que este ciclo genera todo $H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$. Esto es así porque existen isomorfismos tales que

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda) \cong H_{n-1}(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$$

Donde Λ es la unión de todas las $n - 1$ caras de Δ^n salvo una. El primer isomorfismo viene de la sucesión exacta larga de la terna $(\Delta^n, \partial\Delta^n, \Lambda)$. Es análogo a lo que se hace en la demostración del resultado previo, los términos $H_n(\Delta^n, \Lambda)$ son nulos ya que Λ es un retracts de deformación de Δ^n ; la retracción viene dada de proyectar cada punto en Λ y la homotopía correspondiente viene dada de recorrer el segmento que une cada punto con su proyección, el cuál está contenido en Δ^n por ser un conjunto convexo. El segundo isomorfismo viene inducido por la inclusión $i : \Delta^{n-1} \rightarrow \partial\Delta^n$ que tiene como imagen la cara que no está en Λ . Si $n = 1$, tenemos que $\partial\Delta^1 = \{e_0, e_1\}$ y Λ es, sin pérdida de generalidad, igual a $\{e_0\}$. Como los símlices singulares son aplicaciones continuas, tenemos que $S_0(\partial\Delta^1)$ tiene dos generadores y $S_0(\Lambda)$ contiene a uno, y sólo uno, de esos generadores. Por ello $H_0(\partial\Delta^1, \Lambda) \cong \mathbb{Z}$. Como ya se vio antes que $H_0(\Delta^0, \partial\Delta^0) \cong \mathbb{Z}$, tenemos que para $n = 1$ es cierto que exista el isomorfismo de la derecha. Para $n > 1$, $\partial\Delta^{n-1}$ es no vacío por lo que estamos

trabajando con buenos pares y la inclusión i induce un homeomorfismo $\Delta^{n-1}/\partial\Delta^{n-1} \cong \partial\Delta^n/\Lambda$. El que $(\Delta^{n-1}, \partial\Delta^{n-1})$ sea un buen par se debe a que $\partial\Delta^{n-1}$ es cerrado y retracto por deformación de $\Delta^{n-1}-p$, donde p es un punto en el interior de Δ^{n-1} . Nótese que, por construcción, $i_*(i_{n-1}) = i$

Terminamos el argumento de inducción. Sea $i_n \in H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$, tenemos que el primer isomorfismo lleva i_n a ∂i_n en $H_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$ y, por construcción, $[\partial i_n] = [\pm i] = [\pm i_*(i_{n-1})]$ en $S_{n-1}(\partial\Delta^n, \Lambda)$.

Podemos aprovechar esto que acabamos de hacer para calcular un ciclo generador de $H_n(S^n)$. Para ello, debemos notar que $S^n \cong \Delta_1^n \cup \Delta_2^n / \sim$, es decir, estamos diciendo que S^n es homeomorfo a dos discos ($\Delta^n \cong D^n$) pegados por su borde. En la identificación \sim se está preservando el orden de los vértices. Podemos considerar $\Phi_i : \Delta_i^n \rightarrow S^n$ como la composición de $\Delta_i^n \hookrightarrow \Delta_1^n \cup \Delta_2^n \rightarrow \Delta_1^n \cup \Delta_2^n / \sim \rightarrow S^n$, una suerte de aplicaciones características para cada hemisferio de S^n . La diferencia $\Phi_1 - \Phi_2$ es un ciclo, es decir, $\partial(\Phi_1) = \partial(\Phi_2)$. Esto es así por ser la restricción de Φ_1 a cada cara de Δ_1^n igual, como aplicación, a la restricción de Φ_2 a cada cara correspondiente en Δ_2^n . Nuestra afirmación es que $\Phi_1 - \Phi_2$ es un generador de $H_n(S^n)$. Para ello, denotemos por H_1 y H_2 cada hemisferio de S^n , de tal forma que $\Phi_i : \Delta_i^n \rightarrow H_i$ es un homeomorfismo. Es conocido que H_2 es cerrado y es retracto de deformación de $S^n - \{p\}$, con $p \in H_1 - \partial H_1$; por lo que (S^n, H_2) es un buen par. También es conocido que $S^n \cong S^n/H_2$, por lo que la Proposición 2.3.3 nos garantiza que $\tilde{H}_n(S^n) \cong H_n(S^n, H_2)$. De la misma forma, $S^n/H_2 \cong H_1/\partial H_1 \cong \Delta_1^n/\partial\Delta_1^n$, como tanto $(H_1, \partial H_1)$ como $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ son buenos pares, tenemos la siguiente cadena de isomorfismos

$$\tilde{H}_n(S^n) \cong H_n(S^n, H_2) \cong H_n(\Delta^n, \partial\Delta_1^n)$$

Mediante estos isomorfismos, $[\Phi_1 - \Phi_2] = [\Phi_1]$ en $H_n(S^n, H_2)$ y Φ_1 es igual a la identidad $i_n : \Delta_n \rightarrow \Delta_n$ a través del isomorfismo que hemos construido. En el anterior ejemplo se vio que i_n es un generador de $H_n(\Delta^n, \partial\Delta_1^n)$, por lo que $\Phi_1 - \Phi_2$ es un generador en $H_n(S^n)$.

Tras todo este trabajo teórico, por fin podemos probar un importante resultado de homología. Estamos en condiciones de probar que los grupos de homología singulares y simpliciales de un complejo simplicial X son isomorfos. Hasta ahora siempre que hablábamos de grupos de homología usábamos $H_n(X)$ como notación, independientemente de si eran los grupos de homología simpliciales, singulares o de un complejo de cadenas arbitrario. En este caso, para evitar confusión denotaremos por $H_n(X)$ los grupos de homología simpliciales y por $\bar{H}_n(X)$ los singulares.

Como se vio en la Sección 1.1, a cada n -símplice T_α de un complejo simplicial X se le puede asociar su aplicación característica $\sigma_\alpha : \Delta^n \rightarrow T_\alpha$. Es claro que σ_α es un n -símplice singular. Por esto tenemos un homomorfismo $\varphi : C_n(X) \rightarrow S_n(X)$ que nos lleva cada símplice a su símplice singular asociado. Si denotamos por $A \subset X$ un subcomplejo simplicial de X , es sencillo ver que este homomorfismo lleva $C_n(A)$ en $S_n(A)$, por lo que podemos considerar los grupos de cadenas relativas y φ induce un homomorfismo. Con esto hemos llegado a que φ_* puede considerarse como un homomorfismo de $H_n(X, A)$ en $\bar{H}_n(X, A)$. Veamos que es un isomorfismo. Se considerará el caso con $A = \emptyset$, en el cual los grupos de homología relativa son los mismos que los grupos de homología normales.

Teorema 2.3.5. *Los homomorfismos $\varphi_* : H_n(X, A) \rightarrow \bar{H}_n(X, A)$ son isomorfismos para todo n .*

Demostración. Primero hacemos el caso en el que X es finito dimensional y A es vacío. Sea X^k el k -esqueleto de X , recordemos que esto es el subcomplejo formado por todos los símplices de dimensión menor o igual que k ; tenemos el siguiente diagrama conmutativo de sucesiones exactas. Recordemos que las filas vienen dadas por el Lema zig-zag 2.2.5 y los homomorfismos verticales son φ_* .

$$\begin{array}{ccccccccc} H_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & H_n(X^k) & \longrightarrow & H_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & H_{n-1}(X^{k-1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{H}_{n+1}(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & \bar{H}_n(X^{k-1}) & \longrightarrow & \bar{H}_n(X^k) & \longrightarrow & \bar{H}_n(X^k, X^{k-1}) & \longrightarrow & \bar{H}_{n-1}(X^{k-1}) \end{array}$$

Veamos que las aplicaciones verticales primera y cuarta son isomorfismos para todo n . El grupo de cadenas simpliciales $C_n(X^k, X^{k-1})$ es trivial cuando $n \neq k$. Si $n = k$, es un grupo libre abeliano que tiene como base a los k -símplices de X . Como todos ellos son ciclos, por estar

considerando la homología relativa a X^{k-1} , tenemos que $H_n(X^k, X^{k-1})$ es también libre, abeliano y tiene tantos generadores como k -símplices tenga X . Veamos el caso singular. Definimos $\Phi : \dot{\bigcup}_{\alpha} (\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k) \rightarrow (X^k, X^{k-1})$ como la aplicación que en cada coordenada se corresponde con la aplicación característica de cada k -símplice. Ya vimos que Φ induce un homeomorfismo de espacios cociente $\dot{\bigcup}_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \dot{\bigcup}_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k \cong X^k / X^{k-1}$. En la Proposición 2.3.3 se probó que $\overline{H}_n(X, A) \cong \overline{H}_n(X/A)$ para (X, A) buenos pares. Esto también aplica en este caso, por lo que tenemos que

$$\begin{aligned} \overline{H}_n(X^k, X^{k-1}) &\cong \overline{H}_n(X^k / X^{k-1}) \cong \overline{H}_n(\dot{\bigcup}_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k / \dot{\bigcup}_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k) \cong \overline{H}_n(\dot{\bigcup}_{\alpha} \Delta_{\alpha}^k, \dot{\bigcup}_{\alpha} \partial \Delta_{\alpha}^k) \cong \\ &\cong \bigoplus_{\alpha} \overline{H}_n(\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k) \end{aligned}$$

Si $n \neq k$, $\overline{H}_n(X^k, X^{k-1})$ es trivial por serlo cada $\overline{H}_n(\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k)$. Si $n = k$, cada $\overline{H}_n(\Delta_{\alpha}^k, \partial \Delta_{\alpha}^k)$ es un grupo libre con un único generador por el Ejemplo 2.3.4, por lo que $\overline{H}_n(X^k, X^{k-1})$ es un grupo libre y abeliano con tantos generadores como k -símplices.

Ahora procedemos por inducción. Si $k = 0$ sabemos que $H_n(X^0)$ y $\overline{H}_n(X^0)$ son isomorfos, para todo n . El Teorema 1.2.8, la Proposición 2.1.13 y la Proposición 2.1.14 nos dicen que $H_0(X^0)$ y $\overline{H}_0(X^0)$ son iguales a la suma directa de tantas copias de \mathbb{Z} como puntos en X^0 y $H_n(X^0) = \{0\} = \overline{H}_n(X^0)$ para $n > 0$.

Nuestra hipótesis de inducción es que los homomorfismos verticales segundo y quinto son isomorfismos. Por el Lema 2.2.7, tenemos que el homomorfismo central es también un isomorfismo. Con esto tenemos probado el teorema si X es de dimensión finita y A es vacío.

Ahora hacemos el caso en el que X es de dimensión infinita. Para ello necesitamos un resultado auxiliar. Sea C un subconjunto compacto de X , sólo hay una cantidad finita de símplices σ_{α} tales que $\sigma_{\alpha} \cap C \neq \emptyset$. Si hubiera una cantidad infinita de símplices que cumplieran eso, podríamos tomar una sucesión infinita $\{x_i\}$ de puntos, cada uno en un símplice distinto. Los conjuntos $U_i = X - \bigcup_{j \neq i} \{x_j\}$ son un recubrimiento abierto de C que no tiene ningún sobrecubrimiento finito. Esto contradice el que C sea compacto, por lo que sólo hay una cantidad finita de símplices que cumplan esto.

Este resultado se usa para probar que $H_n(X) \rightarrow \overline{H}_n(X)$ es isomorfismo. Tomemos como representante de un elemento en $\overline{H}_n(X)$ un n -ciclo singular, denotado por z . Por definición, z es una combinación lineal formal de una cantidad finita de símplices singulares. Como los símplices singulares son aplicaciones continuas y Δ^n es compacto para todo n , es claro que la imagen de todo símplice singular es compacta en X . Por ello, la imagen de todos los símplices singulares que forman z deben estar contenidos en X^k , para un k lo suficientemente grande. Como $H_n(X^k) \cong \overline{H}_n(X)$, tenemos que hay algún ciclo en $H_n(X^k)$ tal que su imagen es z . En particular tenemos que ese ciclo está en $H_n(X)$, por lo que tenemos probada la sobreyectividad. Probar la inyectividad es totalmente análogo. Si un n -ciclo en $H_n(X)$, denotado por τ , es no trivial y su imagen es nula, es decir, es el borde de una cadena singular en X , esta cadena tiene imagen compacta y hemos visto que ello implica que está contenida en X^k , para algún k . Tenemos que τ es un elemento no trivial en el núcleo de $H_n(X^k) \rightarrow \overline{H}_n(X^k)$, pero sabemos que esta aplicación es un isomorfismo por lo que hemos llegado a una contradicción. Tenemos entonces que $H_n(X) \cong \overline{H}_n(X)$ para X un complejo simplicial de cualquier dimensión, finita o infinita.

Queda probar el caso con $A \neq \emptyset$. Por el Lema zig-zag 2.2.5 y la Proposición 2.3.3 sabemos que existe una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow \overline{H}_n(A) \longrightarrow \overline{H}_n(X) \longrightarrow \overline{H}_n(X/A) \longrightarrow \overline{H}_{n-1}(A) \longrightarrow \overline{H}_{n-1}(X) \longrightarrow \cdots$$

Hemos visto que $H_n(X) \cong \overline{H}_n(X)$ para todo complejo simplicial, por lo que también es cierto que $H_n(A) \cong \overline{H}_n(A)$. Para ver que $H_n(X, A) \cong \overline{H}_n(X, A)$ basta usar el Lema 2.2.7. \square

Antes de terminar esta sección, vamos a introducir una forma de construir espacios topológicos y cómo calcular sus grupos de homología.

Definición 2.3.6. Sean X e Y dos espacios topológicos, sean $x_0 \in X$ y $y_0 \in Y$ puntos. Definimos la **suma en cuña** de X e Y como el cociente de $X \cup Y$ entre la relación $x_0 \sim y_0$. Denotamos a este espacio por $X \vee Y$. Más generalmente, si tomamos $\{X_{\alpha}\}$ una familia de espacios topológicos y $\{x_{\alpha}\}$

un conjunto de puntos tal que $x_\alpha \in X_\alpha$, definimos $\bigvee_\alpha X_\alpha$ como el cociente de $\bigcup_\alpha X_\alpha$ identificando todos los puntos x_α entre sí.

Calcular los grupos de homología de este espacio es equivalente a calcular los grupos de los espacios que lo conforman. Esto es un corolario de la Proposición 2.3.3.

Corolario 2.3.7. *Sea $\bigvee_\alpha X_\alpha$ una suma en cuña. Las inclusiones $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ inducen un isomorfismo $\bigoplus_\alpha i_\alpha : \bigoplus_\alpha \tilde{H}_n(X_\alpha) \rightarrow \tilde{H}_n(\bigvee_\alpha X_\alpha)$, suponiendo que los puntos $\{x_\alpha\}$ en base a los cuales se forma la suma en cuña cumplan que (X_α, x_α) sea un buen par.*

Demostración. Como los grupos de homología relativa respecto de un punto son iguales a los grupos de homología reducida normales, basta tomar $(X, A) = (\bigcup_\alpha X_\alpha, \bigcup_\alpha x_\alpha)$ y usar la Proposición 2.3.3. \square

2.4. Homología con coeficientes

Hasta aquí hemos probado diversos resultados teóricos que ponen de manifiesto la relevancia de la homología. Sin embargo, recordemos que el objetivo principal de este trabajo es hablar de análisis topológico de datos y la realidad es que, cuando se pretenden calcular los grupos de homología de un símplice con miles de elementos, uno necesita buenos algoritmos. Estos se consiguen al trabajar con homología con coeficientes en \mathbb{F}_2 , por ser \mathbb{F}_2 cuerpo y porque al hacer cálculos iterados los coeficientes no pueden crecer descontroladamente. Por ello, probaremos la relación existente entre los grupos de homología con coeficientes en \mathbb{Z} y con coeficientes en un grupo arbitrario G . Los contenidos de esta sección están sacados del Capítulo 6 de [15], pág 299-309, hasta la Definición 2.4.10, a partir de ahí son del Capítulo 3 de [12], pág. 193-194 y 263-265. Empezamos definiendo el pilar en el que se basa la homología con coeficientes: el producto tensorial.

Definición 2.4.1. Sean A y B grupos abelianos. Definimos el **producto tensorial** de A y B como el grupo abeliano generado por los elementos de la forma $a \otimes b$, donde $a \in A$ y $b \in B$ y teniendo las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}(a + a') \otimes b &= a \otimes b + a' \otimes b \\ a \otimes (b + b') &= a \otimes b + a \otimes b'\end{aligned}$$

Denotamos a este grupo por $A \otimes B$.

Definición 2.4.2. Sean $f : A \rightarrow A'$ y $g : B \rightarrow B'$ homomorfismos de grupos. Esto induce de forma única un homomorfismo

$$f \otimes g : A \otimes B \rightarrow A' \otimes B'$$

tal que $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$ para todo a y b . A este homomorfismo inducido se le llama producto tensorial de f y g .

Con esto tenemos que a cada par de grupos abelianos y homomorfismos le corresponden un grupo abeliano y un homomorfismo. Esto se formaliza con el siguiente resultado.

Lema 2.4.3. *La función que lleva (A, B) a $A \otimes B$ y (f, g) a $f \otimes g$ es un functor covariante de la categoría de pares de grupos abelianos y homomorfismos en la categoría de grupos abelianos y homomorfismos.*

Demostración. Para ver este resultado tenemos que ver que si $(f_1, g_1) : (A_1, B_1) \rightarrow (A_2, B_2)$ y $(f_2, g_2) : (A_2, B_2) \rightarrow (A_3, B_3)$, entonces $(f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1) = (f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)$. Por definición, $(f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1)(a \otimes b) = (f_2 \circ f_1)(a) \otimes (g_2 \circ g_1)(b)$ mientras que $(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)(a \otimes b) = (f_2 \otimes g_2)(f_1(a) \otimes g_1(b)) = (f_2 \circ f_1)(a) \otimes (g_2 \circ g_1)(b)$ con lo que tenemos la igualdad que queríamos. Falta ver que si $(Id_A, Id_B) : (A, B) \rightarrow (A, B)$ es la identidad se tiene que $Id_A \otimes Id_B = Id_{A \otimes B}$. Efectivamente, por ser $Id_A \otimes Id_B(a \otimes b) = Id_A(a) \otimes Id_B(b) = a \otimes b$ tenemos el resultado enunciado. \square

Hasta ahora se ha mencionado el término "homología con coeficientes". La idea intuitiva es que las sumas formales de símplices singulares se hagan con coeficientes en un grupo arbitrario, no necesariamente \mathbb{Z} .

Definición 2.4.4. Sea X un espacio topológico, sea $\mathcal{C} = \{C_n, \partial_n\}$ su complejo de cadenas singulares. Sea G un grupo abeliano. Construimos el complejo de cadenas $\{C_n \otimes G, \partial_n \otimes id_G\}$, sus grupos de homología son los que llamamos **grupos de homología de X con coeficientes en G** . Los denotamos por $H_n(X; G)$ o, indistintamente, $H_n(\mathcal{C}; G)$.

El producto tensorial tiene una gran cantidad de propiedades, de las que desarrollaremos las necesarias para este trabajo. Puede dar la impresión de que son propiedades inconexas entre sí, pero todas y cada una de ellas son estrictamente necesarias para enunciar y probar el teorema universal de homología con coeficientes.

Lema 2.4.5. *El producto tensorial es distributivo respecto a la suma directa de grupos, es decir, $(A_1 \oplus A_2) \otimes B \cong (A_1 \otimes B) \oplus (A_2 \otimes B)$.*

Demostración. Denotamos por $j_k : A_k \rightarrow A_1 \oplus A_2$ la inclusión y $\pi_k : A_1 \oplus A_2 \rightarrow A_k$ la proyección naturalmente definidas. Estas inducen los homomorfismos

$$f_k = j_k \otimes i_B : A_k \otimes B \rightarrow (A_1 \oplus A_2) \otimes B \text{ y } g_k = \pi_k \otimes i_B : (A_1 \oplus A_2) \otimes B \rightarrow A_k \otimes B$$

Tenemos que $(A_1 \oplus A_2) \otimes B$ está generado por elementos de la forma $a \otimes b$ con $a \in A_1 \oplus A_2$ y $b \in B$. Tenemos que existe una única combinación de elementos de A_1 y A_2 tal que $a = a_1 + a_2$, con $a_k \in A_k$. Esto es, existen $a_k \in A_k$ tales que $a = j_1(a_1) + j_2(a_2)$. Tenemos entonces que todo elemento de $a \otimes b \in (A_1 \oplus A_2) \otimes B$ se puede escribir como $a \otimes b = f_1(a_1 \otimes b) + f_2(a_2 \otimes b)$. Veamos que esta escritura es única para así tener el isomorfismo. Sea $a = f_1(a_1 \otimes b) + f_2(a_2 \otimes b) = f_1(a'_1 \otimes b) + f_2(a'_2 \otimes b)$. Veamos que es necesario que $a_1 \otimes b = a'_1 \otimes b$ y que $a_2 \otimes b = a'_2 \otimes b$. Notemos que, por ser $\pi_k \circ j_k = id_{A_k}$, tenemos que $g_k \circ f_k = id_{A_k \otimes B}$. Además, $\pi_1 \circ j_2$ y $\pi_2 \circ j_1$ son el homomorfismo trivial, por lo que $g_1 \circ f_2$ y $g_2 \circ f_1$ también lo son. Por ello, si evaluamos en a tenemos que

$$\begin{aligned} g_1(a) &= g_1(f_1(a_1 \otimes b) + f_2(a_2 \otimes b)) = (g_1 \circ f_1)(a_1 \otimes b) + (g_1 \circ f_2)(a_2 \otimes b) = a_1 \otimes b \\ g_1(a) &= g_1(f_1(a'_1 \otimes b) + f_2(a'_2 \otimes b)) = (g_1 \circ f_1)(a'_1 \otimes b) + (g_1 \circ f_2)(a'_2 \otimes b) = a'_1 \otimes b \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} g_2(a) &= g_2(f_1(a_1 \otimes b) + f_2(a_2 \otimes b)) = (g_2 \circ f_1)(a_1 \otimes b) + (g_2 \circ f_2)(a_2 \otimes b) = a_2 \otimes b \\ g_2(a) &= g_2(f_1(a'_1 \otimes b) + f_2(a'_2 \otimes b)) = (g_2 \circ f_1)(a'_1 \otimes b) + (g_2 \circ f_2)(a'_2 \otimes b) = a'_2 \otimes b \end{aligned}$$

Con lo que se concluye que $a_1 \otimes b = a'_1 \otimes b$ y $a_2 \otimes b = a'_2 \otimes b$. □

Lema 2.4.6. *Sean $\phi : B \rightarrow C$ y $\phi' : B' \rightarrow C'$ homomorfismos sobreyectivos. Entonces $\phi \otimes \phi' : B \otimes B' \rightarrow C \otimes C'$ es sobreyectivo y el núcleo es el subgrupo de $B \otimes B'$ generado por elementos de la forma $b \otimes b'$ con $b \in \ker(\phi)$ o $b' \in \ker(\phi')$.*

Demostración. Sea G el subgrupo descrito en el enunciado. Es claro que $G \subseteq \ker(\phi \otimes \phi')$, por lo que tenemos el homomorfismo inducido

$$\Phi : (B \otimes B')/G \rightarrow C \otimes C'$$

Para mostrar el resultado basta con probar que Φ es un isomorfismo. Para ello construimos una inversa Ψ . Empezamos por definir $\psi : C \times C' \rightarrow (B \otimes B')/G$, donde $\psi(c, c') = b \otimes b' + G$ donde se elige b y b' tales que $\phi(b) = c$ y $\phi'(b') = c'$. Veamos que está bien definida. Supongamos que $\phi(b_0) = c$ y $\phi'(b'_0) = c'$. Entonces

$$b \otimes b' - b_0 \otimes b'_0 = ((b - b_0) \otimes b') + (b_0 \otimes (b' - b'_0))$$

Y es claro que estos elementos están en G por ser $b - b_0 \in \ker(\phi)$ y $b' - b'_0 \in \ker(\phi')$. Entonces ψ está bien definida. Veamos que ψ es bilineal. $\psi(c_1 + c_2, c'_1 + c'_2) = b \otimes b' + G$ con $\phi(b) = c_1 + c_2$, como ϕ es sobreyectiva existen b_1 y b_2 tales que $\phi(b_1) = c_1$ y $\phi(b_2) = c_2$. De forma análoga tenemos b'_1 y b'_2 tales que $\phi'(b'_1) = c'_1$ y $\phi'(b'_2) = c'_2$. Hemos probado antes que, como $\phi(b_1 + b_2) = c_1 + c_2 = \phi(b)$ y $\phi'(b'_1 + b'_2) = c'_1 + c'_2 = \phi'(b')$, $(b_1 + b_2) \otimes (b'_1 + b'_2) + G = b \otimes b' + G$; y es claro, por definición de producto tensorial, que $(b_1 + b_2) \otimes (b'_1 + b'_2) = b_1 \otimes b'_1 + b_1 \otimes b'_2 + b_2 \otimes b'_1 + b_2 \otimes b'_2 = \psi(c_1, c'_1) + \psi(c_1, c'_2) + \psi(c_2, c'_1) + \psi(c_2, c'_2)$. Con esto tenemos que ψ induce un homomorfismo $\Psi : C \otimes C' \rightarrow (B \otimes B')/G$.

Veamos que $\Psi \circ \Phi$ y $\Phi \circ \Psi$ son la identidad y, por tanto, Φ es isomorfismo. Es una mera comprobación directa que $\Psi \circ \Phi(b \otimes b') = \Psi(\phi(b) \otimes \phi'(b')) = b \otimes b' + G$ y que $\Phi \circ \Psi(c \otimes c') = \Phi(b \otimes b') = c \otimes c'$, con $\phi(b) = c$ y $\phi'(b') = c'$, por lo que $\Phi(b \otimes b') = c \otimes c'$. □

Proposición 2.4.7. Sean A , B y C grupos abelianos. Consideremos la sucesión exacta:

$$A \xrightarrow{\phi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

Entonces la secuencia:

$$A \otimes G \xrightarrow{\phi \otimes i_G} B \otimes G \xrightarrow{\psi \otimes i_G} C \otimes G \longrightarrow 0$$

Es exacta. Si ϕ es inyectiva y la primera secuencia se escinde, entonces $\phi \otimes i_G$ es inyectiva y la segunda secuencia se escinde.

Demostración. El Lema 2.4.6 implica que $\psi \otimes i_G$ es sobreyectiva y que su núcleo, el cual denotaremos por D , está generado por los elementos de la forma $b \otimes g$ con $b \in \ker(\psi)$. La imagen de $\phi(a) \otimes i_G$ es el subgrupo, denotado por E , generado por los elementos de la forma $\phi(a) \otimes g$. Como $\text{im}(\phi) = \ker(\psi)$, tenemos que $D = E$. Para la segunda afirmación, supongamos que ϕ es inyectiva y que la secuencia se escinde. Sea $p : B \rightarrow A$ un homomorfismo tal que $p \circ \phi = \text{id}_A$. Entonces

$$(p \otimes i_G) \circ (\phi \otimes i_G) = i_A \otimes i_G = i_{A \otimes G}$$

por lo que $\phi \otimes i_G$ es inyectiva y $p \otimes i_G$ escinde la segunda sucesión. \square

Teorema 2.4.8. Sea G un grupo abeliano, existe un isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes G \cong G$ que manda $n \otimes g$ a ng .

Demostración. La función que va de $\mathbb{Z} \times G$ a G que lleva (n, g) a ng es claramente bilineal, por lo que induce un homomorfismo $\phi : \mathbb{Z} \otimes G \rightarrow G$ que manda $n \otimes g$ a ng . Para ver que es un isomorfismo definimos una inversa ψ . Sea $\psi : G \rightarrow \mathbb{Z} \otimes G$ definida como $\psi(g) = 1 \otimes g$, claramente es un homomorfismo. Para cada $g \in G$, tenemos que $(\phi \circ \psi)(g) = \phi(1 \otimes g) = g$. Si tomamos $n \otimes g$ un generador cualquiera de $\mathbb{Z} \otimes G$, tenemos que $(\psi \circ \phi)(n \otimes g) = \psi(ng) = 1 \otimes (ng) = n \otimes g$. Por lo tanto ϕ es un isomorfismo. \square

Este resultado refleja que con la Definición 2.4.4 estamos haciendo exactamente lo que queríamos, que las cadenas singulares se comporten como sumas formales con coeficientes en G .

Corolario 2.4.9. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes G \cong G/mG$.

Demostración. Tomamos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

donde m quiere decir el homomorfismo "multiplicar por m ". Hacemos el producto tensorial con G y, por la Proposición 2.4.7, obtenemos la sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \otimes G \xrightarrow{m \otimes i_G} \mathbb{Z} \otimes G \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes G \longrightarrow 0$$

Aplicando el Teorema 2.4.8, obtenemos la sucesión exacta

$$G \xrightarrow{m} G \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes G \longrightarrow 0 \quad \square$$

Estos dos últimos resultados son relevantes ya que nos permitirán calcular $H_n(X) \otimes G$, cuando conozcamos $H_n(X)$.

Pero ya hemos hablado suficiente de producto tensorial, ahora vamos a centrarnos en nuestra siguiente herramienta: el producto de torsión. La construcción es ciertamente más laboriosa que la del producto tensorial, ya que lleva más trabajo comprobar que sea una buena definición, en el sentido de que sea unívoca.

Definición 2.4.10. Una **resolución libre** de un grupo abeliano H es una sucesión exacta de grupos abelianos

$$\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{f_2} F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \xrightarrow{f_0} H \longrightarrow 0$$

donde F_i es un grupo libre para todo i .

De a las resoluciones libres necesitaremos dos propiedades: que existen y que, de alguna forma, tan sólo dependen de H . Denotamos por $F(H)$ el grupo libre generado por los elementos de H y por $R(H)$ el núcleo de la proyección $F(H) \rightarrow H$. Llamamos **resolución canónica** de H a la sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow R(H) \longrightarrow F(H) \longrightarrow H \longrightarrow 0$$

Con esto tenemos que siempre podemos suponer la existencia de una resolución libre, para cualquier grupo abeliano. Ahora probamos que, de alguna forma, tan sólo dependen de H .

Lema 2.4.11. *Sean dadas dos resoluciones \mathcal{F} y \mathcal{F}' de grupos abelianos H y H' , respectivamente, entonces todo homomorfismo $\alpha : H \rightarrow H'$ puede extenderse a un homomorfismo de cadenas de \mathcal{F} a \mathcal{F}'*

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_2 & \xrightarrow{f_2} & F_1 & \xrightarrow{f_1} & F_0 \xrightarrow{f_0} H \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \downarrow \alpha_0 \\ \cdots & \longrightarrow & F'_2 & \xrightarrow{f'_2} & F'_1 & \xrightarrow{f'_1} & F'_0 \xrightarrow{f'_0} H' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Además dos extensiones cualesquiera de α son homótopas. En el caso particular de que $H = H'$ se tiene que, para cualquier grupo abeliano G , $H_n(\mathcal{F} \otimes G) \cong H_n(\mathcal{F}' \otimes G)$.

Demostración. Los homomorfismos α_i se construyen por inducción. Como los F_i son libres basta definir cada α_i para un conjunto generador de F_i . Para definir α_0 , como f'_0 es sobreyectiva tenemos que para cada elemento generador x de F_0 existe un $x' \in F'_0$ tal que $f'_0(x') = \alpha f_0(x)$. Ahora suponemos definida α_{i-1} , sea $x \in F_i$ un elemento generador. Nos gustaría poder tomar un $x' \in F'_i$ tal que $f'_i(x') = \alpha_{i-1} f_i(x)$; esto es posible si y solo si $\alpha_{i-1} f_i(x) \in \text{im}(f'_i) = \ker(f'_{i-1})$. Efectivamente, $f'_{i-1} \alpha_{i-1} f_i(x) = \alpha_{i-1} f_{i-1} f_i(x) = \alpha_{i-1}(0) = 0$ por lo que podemos definir de esta manera α_i . Nótese que esta forma de construir α_i no es única, por eso se prueba el que dos elecciones distintas en realidad no afecta al homomorfismo inducido entre los grupos de homología.

Supongamos que tenemos otra extensión de α , denotada por $\alpha'_i : F_i \rightarrow F'_i$; entonces las sucesivas diferencias $\beta_i = \alpha_i - \alpha'_i$ definen un homomorfismo de cadenas que extiende el homomorfismo nulo $\beta : H \rightarrow H'$. Bastará con construir unas aplicaciones $\lambda_i : F_i \rightarrow F'_{i+1}$ que definan una homotopía de cadenas de β_i con el homomorfismo nulo, es decir, con $\beta_i = f'_{i+1} \lambda_i + \lambda_{i-1} f_i$. Definimos los λ_i por inducción, como los α_i . Para $i = 0$ consideramos $\lambda_{-1} : H \rightarrow F'_0$ como el homomorfismo nulo y entonces la relación con β_0 pasa a ser $\beta_0 = f'_1 \lambda_0$. Sea $x \in F_0$ un elemento generador, buscamos un elemento $x' \in F'_1$ tal que $f'_1(x') = \beta_0(x)$. Como $\text{im}(f'_1) = \ker(f'_0)$ y $f'_0 \beta_0(x) = \beta f_0(x) = 0$, tenemos que ese elemento buscado existe. Ahora pasamos a hacer inducción sobre i , supongamos que tenemos λ_{i-1} definido, con las propiedades que necesitamos. Sea $x \in F_i$ un elemento generador, buscamos un $x' \in F'_{i+1}$ tal que $f'_{i+1}(x') = \beta_i - \lambda_{i-1} f_i(x)$. Esto es posible si y sólo si $\beta_i - \lambda_{i-1} f_i(x) \in \text{im}(f'_{i+1}) = \ker(f'_i)$. Usando que $f'_i \beta_i = \beta_{i-1} f_i$ y que $\beta_{i-1} = f'_i \lambda_{i-1} + \lambda_{i-2} f_{i-1}$, lo cual sabemos que es cierto por inducción, tenemos que

$$f'_i(\beta_i - \lambda_{i-1} f_i) = f'_i \beta_i - f'_i \lambda_{i-1} f_i = \beta_{i-1} f_i - f'_i \lambda_{i-1} f_i = (\beta_{i-1} - f'_i \lambda_{i-1}) f_i = \lambda_{i-2} f_{i-1} f_i = 0$$

como deseábamos. Con esto ya tenemos que los α_i y los α'_i son homótopos de cadenas.

Ahora consideramos las sucesiones resultantes de hacer el producto tensorial de dos resoluciones de H con un grupo abeliano G . En este caso $\alpha : H \rightarrow H$ es la identidad. Con eso obtenemos dos complejos de cadenas $\mathcal{F} \otimes G$ y $\mathcal{F}' \otimes G$ con homomorfismos $\alpha_i \otimes id_G$. Además si tenemos dos elecciones distintas de α_i y α'_i sabemos que existen $\lambda_i : F_i \rightarrow F'_{i+1}$ tales que $\alpha_i - \alpha'_i = f'_{i+1} \lambda_i + \lambda_{i-1} f_i$ por lo que $\alpha_i \otimes id_G - \alpha'_i \otimes id_G = (f'_{i+1} \otimes id_G)(\lambda_i \otimes id_G) + (\lambda_{i-1} \otimes id_G)(f_i \otimes id_G)$, por lo que los homomorfismos inducidos $\alpha_* : H_n(\mathcal{F} \otimes G) \rightarrow H_n(\mathcal{F}' \otimes G)$ son independientes de cómo se hayan construido los α_i .

Si tenemos una composición $H \xrightarrow{\alpha} H' \xrightarrow{\beta} H''$ y resoluciones libres \mathcal{F} , \mathcal{F}' y \mathcal{F}'' (cada una de su grupo correspondiente) los homomorfismos inducidos satisfacen que $(\beta\alpha)_* = \beta_* \alpha_*$, ya que podemos tomar como homomorfismo de cadenas el resultante de componer β y α y hemos probado que el homomorfismo inducido entre los grupos de homología es único. Por lo tanto si tomamos, como en este caso, α un isomorfismo, β su inversa y $\mathcal{F} = \mathcal{F}''$ tenemos que $\beta_* \alpha_* = (\beta\alpha)_* = id_* = id$. Se procede de forma análoga con $\alpha_* \beta_*$ y con ello tenemos que α_* es un isomorfismo si α lo es. Como en este caso tomamos $\alpha = id_H$ tenemos un isomorfismo canónicamente definido $H_n(\mathcal{F} \otimes G) \cong H_n(\mathcal{F}' \otimes G)$, para todo n . \square

Por lo tanto el grupo $H_n(\mathcal{F} \otimes G)$ en realidad sólo depende de H y de G , a este grupo se le denota por $\text{Tor}_n(H, G)$. Como una resolución libre de la forma $0 \rightarrow F_1 \rightarrow F_0 \rightarrow H \rightarrow 0$ siempre existe, tenemos que $\text{Tor}_n(H, G) = 0$ para todo $n > 1$. Por lo tanto, tan sólo resulta relevante hablar de $\text{Tor}_1(H, G)$ y, por ello, lo denotaremos simplemente como $\text{Tor}(H, G)$. Con la construcción que se ha dado es claro que $\text{Tor}(H, G)$ es un functor en ambas variables: si tenemos homomorfismos $\alpha : H \rightarrow H'$ y $\beta : G \rightarrow G'$ tenemos que los homomorfismos inducidos satisfacen $(\alpha\alpha')_* = \alpha_*\alpha'_*$, $(\beta\beta')_* = \beta_*\beta'_*$ y $id_* = id$.

El siguiente teorema, conocido como teorema de coeficientes universales para homología, nos caracteriza los grupos de homología con coeficientes en G en función de los grupos de homología con coeficientes en \mathbb{Z} .

Teorema 2.4.12 (Teorema universal de coeficientes). *Sea \mathcal{C} un complejo de cadenas de grupos abelianos libres, entonces existen sucesiones exactas cortas*

$$0 \longrightarrow H_n(\mathcal{C}) \otimes G \longrightarrow H_n(\mathcal{C}; G) \longrightarrow \text{Tor}(H_{n-1}(\mathcal{C}), G) \longrightarrow 0$$

para todo n y para todo G , y estas sucesiones se escinden.

Demostración. Por falta de espacio, se ha decidido reducir la prueba completa de este teorema a un esquema. Se pueden encontrar los detalles en [6]. La idea es partir de la sucesión exacta corta $0 \rightarrow Z_n \rightarrow C_n \rightarrow B_{n-1} \rightarrow 0$, hacer su producto tensorial con G , comprobar que sigue siendo exacta corta, aplicar el Lema zig-zag 2.2.5, comprobar que la sucesión que nos da este lema es de la forma $B_n \otimes G \rightarrow Z_n \otimes G \rightarrow H_n(\mathcal{C}; G) \rightarrow B_{n-1} \otimes G \rightarrow Z_{n-1} \otimes G$. A partir de esa sucesión exacta larga se construye la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow \text{coker}(i_n \otimes id_G) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}; G) \longrightarrow \text{ker}(i_{n-1} \otimes id_G) \longrightarrow 0$$

donde $i_n : B_n \rightarrow Z_n$ es la inclusión y, para terminar, se ve que esa sucesión exacta corta es isomorfa a la del enunciado del teorema. Para ver que se escinde basta seguir cada paso que se da en la prueba y comprobar que en ningún paso se pierde esa propiedad. \square

Con los resultados 2.4.8 y 2.4.9 ya podemos calcular fácilmente $H_n(X) \otimes G$ a partir de $H_n(X)$. Nos queda estudiar algo más el producto de torsión para poder calcular $\text{Tor}(H_{n-1}(X), G)$ con la misma facilidad.

Proposición 2.4.13. *Se cumplen las siguientes propiedades.*

1. $\text{Tor}(\bigoplus_i A_i, B) \cong \bigoplus_i \text{Tor}(A_i, B)$.
2. $\text{Tor}(A, B) = 0$ si A es libre.
3. $\text{Tor}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, A) \cong \text{ker}(A \xrightarrow{n} A)$.

Demostración. Para ver que (1) es cierto, basta tomar como resolución libre de $\bigoplus_i A_i$ la suma directa de las resoluciones libre de cada A_i . Es decir, tenemos

$$\dots \longrightarrow F_i^3 \longrightarrow F_i^2 \longrightarrow F_i^1 \longrightarrow A_i \longrightarrow 0$$

$$\dots \longrightarrow \bigoplus_i F_i^3 \longrightarrow \bigoplus_i F_i^2 \longrightarrow \bigoplus_i F_i^1 \longrightarrow \bigoplus_i A_i \longrightarrow 0$$

donde la primera sucesión es una resolución libre de A_i y la segunda lo es de $\bigoplus_i A_i$. Por construcción, $H_1(\bigoplus_i \mathcal{F}_i; \bigoplus_i A_i) \cong \bigoplus_i H_1(\mathcal{F}_i, A_i)$, con lo que se da (1). Para (2), si A es libre entonces existe una resolución libre de A con $F_n = 0$ para todo $n \geq 1$. Basta tomar la resolución libre canónica, ya que en este caso el núcleo de la proyección $F(A) \rightarrow A$ es 0, por lo que $R(A) = 0$. Recordemos que $F(A)$ es el grupo libre generado por los elementos de A . Por tanto, $\text{Tor}(A, B) = 0$ para todo B . Finalmente, ver que (3) es cierto es muy similar a lo que hemos hecho en (1). Tomamos la siguiente resolución libre $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$, hacemos su producto

tensorial con A para obtener $\mathbb{Z} \otimes A \xrightarrow{n \otimes id_A} \mathbb{Z} \otimes A \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes A \longrightarrow 0$ y, siguiendo la demostración del Teorema 2.4.8, llegamos a $A \xrightarrow{n} A \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes A \longrightarrow 0$, a partir de la cual (3) es trivial. \square

Capítulo 3

Homología celular

La homología celular es una herramienta muy potente dentro de la homología ya que permite calcular los grupos de homología con muy pocas cuentas, en comparación a la homología simplicial. Esto se debe a que los objetos con los que trabaja, los *CW* complejos, son mucho más flexibles en su construcción. Los contenidos de este capítulo están sacados del Capítulo 2 de [12], pág. 134-144.

3.1. CW complejos

En vez de definir un **CW-complejo** como un objeto que cumpla una serie de propiedades, se suele definir de forma inductiva en la dimensión. Por ello, daremos los pasos que sigue su construcción.

1. Un CW-complejo de dimensión 0 es cualquier espacio topológico discreto. Lo denotaremos por X^0 y sus elementos son llamados 0-celdas.
2. Ahora viene el paso inductivo. Para construir un CW-complejo X^n de dimensión n partimos de un CW-complejo X^{n-1} de dimensión $n-1$. Para hacerlo pegamos n -celdas, denotadas por e_α^n , a través de aplicaciones $\varphi_\alpha : S^{n-1} \rightarrow X^{n-1}$. Esto quiere decir que X^n es el cociente de $X^{n-1} \dot{\bigcup}_\alpha D_\alpha^n$ entre las identificaciones $x \sim \varphi_\alpha(x)$ para $x \in \partial D_\alpha^n$; donde D^n denota el disco cerrado de dimensión n y ∂D^n su borde. Definimos la n -celda e_α^n como la imagen de $D_\alpha^n - \partial D_\alpha^n$ a través de la aplicación cociente, por lo que e_α^n es homeomorfa a $D_\alpha^n - \partial D_\alpha^n$ por construcción.
3. Una vez que hemos terminado de pegar todas las celdas pertinentes, definimos $X = \bigcup_n X^n$. Dotamos a X de la topología débil, en la que $A \subset X$ es abierto (o cerrado) si y sólo si $A \cap X^n$ es abierto (o cerrado), para todo n .

Cada celda e_α^n tiene asociada, de forma natural, una aplicación característica Φ_α fruto de la composición de $D_\alpha^n \hookrightarrow X^{n-1} \dot{\bigcup}_\alpha D_\alpha^n \rightarrow X^n \hookrightarrow X$. Nótese que la inclusión $X^n \hookrightarrow X$ es continua por la condición (3) de la construcción. Por tanto, Φ_α es continua. Por construcción, la restricción de Φ_α al interior de D_α^n es un homeomorfismo hacia e_α^n . Ahora enunciamos un resultado que puede parecer irrelevante pero que lo necesitaremos para construir la homología celular. Concretamente, se usa en 3.2.1.

Proposición 3.1.1. *Sea X un CW complejo. Un subespacio compacto $C \subset X$ sólo puede tener intersección no vacía con una cantidad finita de celdas.*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\{x_i\} \subset C$ tal que cada x_i está en una celda distinta. Se cumple que el conjunto $S = \{x_i\}$ es cerrado en X . Es claro que $X^0 \cap S$ es cerrado por tener X^0 la topología discreta. Supongamos que S es cerrado en X^{n-1} , entonces para cada n -celda e_α^n de X , $\varphi_\alpha^{-1}(S)$ es cerrado en ∂D_α^n , y Φ_α^{-1} consiste de a lo sumo un punto en D_α^n , por lo que $\Phi_\alpha^{-1}(S)$ es cerrado en D_α^n . Por tanto $S \cap X^n$ es cerrado en X^n para todo

n , lo que implica que S es cerrado en X . El mismo argumento de antes nos dice que cualquier subconjunto de S es cerrado, por lo que S tiene la topología discreta. Como C es compacto y S es un subconjunto cerrado, S es compacto en C . Sin embargo, esto es una contradicción ya que un espacio discreto y compacto debe ser finito. \square

Un ejemplo típico de la versatilidad de los CW-complejos es el toro. Es conocido que el menor complejo simplicial que triangula al toro tiene 7 vértices, 14 caras y 21 aristas. Sin embargo, como se verá en el Ejemplo 3.3.1, para construir el toro como un CW-complejo tan sólo hacen falta una 0-celda, dos 1-celdas y una dos-celda.

3.2. Definición, isomorfismo y cálculo

En esta sección nos centraremos en construir la homología celular, con ayuda de los resultados que ya tenemos sobre homología singular; probaremos que los grupos de homología celulares y singulares son isomorfos para todo CW complejo y daremos una forma de calcular estos grupos, en base a la noción de grado de una aplicación. Empezamos por unos resultados de los grupos de homología de un CW-complejo.

Lema 3.2.1. *Sea X es un CW complejo, entonces*

1. $H_k(X^k, X^{k-1})$ es trivial si $n \neq k$ y es libre abeliano si $n = k$, con un generador por cada n -celda de X .
2. $H_k(X^n)$ es trivial para $k > n$. En particular, si X es finito-dimensional entonces $H_k(X)$ es trivial para $k > \dim X$.
3. El homomorfismo $H_k(X^n) \rightarrow H_k(X)$ inducido por la inclusión es un isomorfismo para $k < n$ y es sobreyectivo para $n = k$.

Demostración. Para probar la primera afirmación, basta notar que (X^n, X^{n-1}) es un buen par, por ser X^{n-1} retracto de deformación de X^n menos un punto de cada n -celda, y X^n/X^{n-1} es una 'suma wedge' de n -esferas, una por cada n -celda de X . Por el Lema 2.3.7 y el Ejemplo 2.3.4 tenemos lo que queremos. Para la segunda, empezamos considerando una parte de la sucesión exacta larga asociada a (X^n, X^{n-1}) :

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^{n-1}) \longrightarrow H_k(X^n) \longrightarrow H_k(X^n, X^{n-1})$$

Si $k \neq n$, ya sabemos por (1) que el homomorfismo central es sobreyectivo, por ser $H_k(X^n, X^{n-1}) = \{0\}$. De forma análoga, si $k \neq n-1$, entonces $H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) = \{0\}$ por lo que el homomorfismo central es inyectivo. Lo que hemos probado con esto es que el homomorfismo $H_k(X^{n-1}) \rightarrow H_k(X^n)$ es un isomorfismo salvo si $k = n$, caso en el que sólo sabemos que es inyectivo; o si $k = n+1$, caso en el que sólo sabemos que es sobreyectivo. Como $H_k(X^0) = \{0\}$, si $k > 0$, tenemos probado (2). También con esto tenemos probado (3), en el caso de que X es finito-dimensional.

Para el caso con X de dimensión arbitraria podemos reproducir un argumento similar al que se dio en el Teorema 2.3.5 para ver el caso con dimensión arbitraria. Sea ξ un símlice singular; como su imagen es compacta en X tenemos que, por la Proposición 3.1.1, su imagen está contenida en una cantidad finita de celdas. Esto nos dice que si $\xi \in S_k(X)$, existe un m tal que $\xi \in S_k(X^m)$. Por lo que se probó en el caso finito-dimensional, esto nos dice que para todo $n \geq k$ existe un ciclo $\varsigma \in H_k(X^n)$ tal que $[\xi] = [\varsigma]$ en $H_k(X)$; por lo que el homomorfismo inducido por la inclusión es sobreyectivo. Para ver la inyectividad, sea $\xi \in H_k(X^n)$ tal que $[\xi] = [0]$ en $H_k(X)$. Entonces, existe un $\varsigma \in B_k(X)$ tal que $\delta(\varsigma) = \xi$. Sabemos que existe un $m \geq n$ (nótese que, de existir, podemos tomarle tan grande como queramos ya que $X^n \subset X^m$ si $n \leq m$) tal que $\varsigma \in S_{k+1}(X^m)$, por lo que $[\xi] = [0]$ en $H_k(X^m)$, lo que implica que $[\xi] = [0]$ en $H_k(X^n)$. Es decir, con esto último hemos visto que el núcleo del homomorfismo es exactamente $[0]$, con lo que tenemos la inyectividad. \square

Con este Lema 3.2.1, trozos de las sucesiones largas exactas asociadas a (X^{n+1}, X^n) , (X^n, X^{n-1}) y (X^{n-1}, X^{n-2}) ; construimos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & \nearrow & \\
 & & & & H_n(X^{n+1}) & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 0 & & & H_n(X^n) & & & \\
 & \nearrow \partial_{n+1} & & \searrow j_n & & & \\
 \cdots & H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) & \xrightarrow{d_{n+1}} & H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \cdots \\
 & & & \searrow \partial_n & & \nearrow j_{n-1} & \\
 & & & H_{n-1}(X^{n-1}) & & & \\
 & & & \nearrow & & & \\
 & & & 0 & & &
 \end{array}$$

Las sucesiones largas exactas asociadas a los distintos pares se usan en las diagonales, donde las sucesiones se "detienen" en un 0. Es al asegurar que esos términos son 0 donde se usa el Lema 3.2.1. No se nos olvide que sabemos que $H_n(X^{n+1}) \cong H_n(X)$, por el mismo resultado. Los homomorfismos d_{n+1} y d_n se definen como las composiciones $j_n \partial_{n+1}$ y $j_{n-1} \partial_n$, respectivamente. Es claro que j_n es el homomorfismo inducido por la proyección $S_n(X^n) \rightarrow S_n(X^n)/S_n(X^{n-1})$. Por construcción tenemos que $d_n d_{n+1} = 0$, ya que $d_n d_{n+1} = j_{n-1} \partial_n j_n \partial_{n+1}$ y $\partial_n j_n = 0$, por la exactitud de la sucesión. Por tanto, la sucesión horizontal es un complejo de cadenas, al que llamaremos **complejo de cadenas celular** de X . Esto tiene sentido, ya que hemos estudiado $H_n(X^n, X^{n-1})$ y sabemos que es un grupo libre, abeliano y con un generador por cada n -celda; por lo que podemos considerar cada elemento de $H_n(X^n, X^{n-1})$ como una combinación lineal formal de n -celdas de X , para que coincida con lo que se ha hecho hasta ahora para definir grupos de cadenas. A los grupos de homología de este complejo los llamamos **grupos de homología celular**. Temporalmente los denotaremos por $H_n^{CW}(X)$.

Teorema 3.2.2. Sea X un complejo celular, $H_n^{CW}(X) \cong H_n(X)$ para todo n .

Demostración. Por el diagrama previo, $H_n^{CW} \cong H_n(X^n)/\text{im}(\partial_{n+1})$. Como j_n es inyectiva, por la exactitud de la sucesión exacta larga asociada a (X^n, X^{n-1}) , $\text{im}(\partial_{n+1}) \cong \text{im}(j_n \partial_{n+1}) = \text{im}(d_{n+1})$. También sabemos, por ser j_n inyectiva, que $H_n^{X^n} \cong \text{im}(j_n) = \ker(\partial_n)$. Como j_{n-1} también es inyectiva, $\ker(\partial_n) = \ker(d_n)$. Tenemos que $H_n(X^n) \cong \ker(d_n)$, $\text{im}(\partial_{n+1}) \cong \text{im}(d_{n+1})$ y $H_n(X) \cong H_n(X^n)/\text{im}(\partial_{n+1})$. \square

Ahora nos gustaría tener un método para calcular esta homología celular ya que, como ya se ha indicado, la ventaja de hacer homología celular es que es muy flexible; en el sentido de que se pueden calcular los grupos de homología de distintos espacios con muy pocas celdas, mientras que con homología simplicial necesitaríamos un complejo simplicial con muchos símlices. Por ejemplo, la forma natural de triangular S^n es como el borde de Δ^n ; mientras que podemos trabajar con S^n como un CW complejo con un punto y una n -celda. Para poder entender los grupos de homología celular debemos hablar un poco del *grado* de una aplicación $f : S^n \rightarrow S^n$.

Definición 3.2.3. Sea $f : S^n \rightarrow S^n$ una aplicación continua, con $n > 0$. Esta aplicación induce $f_* : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ un homomorfismo que, como $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, se puede interpretar como $f_* : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ y por ello existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $f_*(n) = dn$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Llamamos **grado** de f a este valor d y le denotamos por $\deg(f)$.

Esta noción de grado de una aplicación tiene varias propiedades básicas, de las que enunciaremos y probaremos algunas.

Proposición 3.2.4. Sean $f, g : S^n \rightarrow S^n$ aplicaciones continuas, con $n > 0$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\deg(id_{S^n}) = 1$.
2. Si f es un homeomorfismo, $\deg(f) = \pm 1$.
3. Si f y g son homótopas, $\deg(f) = \deg(g)$.
4. Si f no es sobreyectiva, $\deg(f) = 0$.
5. $\deg(fg) = \deg(f)\deg(g)$
6. Si f es una reflexión por un hiperplano vectorial en S^n , $\deg(f) = -1$.
7. Si f es antipodal, $\deg(f) = (-1)^{n+1}$.

Demostración. Las propiedades (1) y (2) son triviales con lo que sabemos, ya que $(id_{S^n})_* = id_{\mathbb{Z}}$ y f_* es un isomorfismo. La propiedad (3) se sigue de la Proposición 2.1.9. Si f no es sobreyectiva, sea x_0 un punto que no esté en su imagen. Podemos "factorizar" f como la composición de $S^n \rightarrow S^n - \{x_0\} \hookrightarrow S^n$ y como $S^n - \{x_0\}$ es contráctil, $H_n(S^n - \{x_0\}) = 0$; con lo que f_* es el homomorfismo nulo. Que (5) sea cierta viene dado de que $(fg)_* = f_*g_*$. Para comprobar (6), nótese que f deja fijo a un S^{n-1} e intercambia los puntos de los dos hemisferios determinados por S^{n-1} . Reproducimos un argumento similar al dado en el Ejemplo 2.3.4, donde se vio que $\Phi_1 - \Phi_2$ es un generador de $H_n(S^n)$, donde Φ_1 y Φ_2 son las aplicaciones características de dos hemisferios H_1 y H_2 complementarios. Tomamos como H_1 y H_2 los hemisferios determinados por el conjunto de puntos fijos de f . Es claro que, por definición, $f_*(\Phi_1) = \Phi_2$ y $f_*(\Phi_2) = \Phi_1$, por lo tanto $f_*(\Phi_1 - \Phi_2) = -(\Phi_1 - \Phi_2)$. Esto nos dice que $\deg(f) = -1$. Para ver (7) basta notar que la aplicación antipodal es la composición de $n + 1$ reflexiones, una reflexión por cada coordenada de \mathbb{R}^{n+1} , y usar (5) y (6). \square

Para poder usar esta noción de grado de una aplicación para calcular los grupos de homología celular, necesitaremos un procedimiento para calcular este valor. Sea $f : S^n \rightarrow S^n$, con $n > 0$, y supongamos que existe un $y \in S^n$ tal que $\sharp f^{-1}(y)$ es finito, digamos que $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$. Sean U_1, \dots, U_m entornos abiertos disjuntos de esos puntos, sea V un entorno de y tal que $f(U_i) \subset V$ para todo i . Por el Teorema de Excisión, $H_n(U_i, U_i - x_i) \cong \mathbb{Z} \cong H_n(V, V - y)$, esto lo probaremos con detalle en la demostración del Teorema 3.2.6 pero lo necesitamos ya. Con estas hipótesis y esta notación damos la siguiente definición y el consecuente teorema.

Definición 3.2.5. Consideramos $f_* : H_n(U_i, U_i - x_i) \rightarrow H_n(V, V - y)$. Llamamos **grado local** de f en x_i al entero k que caracteriza a f_* . Lo denotamos por $\deg(f, x_i)$.

Teorema 3.2.6. $\deg(f) = \sum_i \deg(f, x_i)$

Demostración. Notemos que $f(U_i - x_i) \subset V - y$, con lo que construimos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(U_i, U_i - x_i) & \xrightarrow{f_*} & H_n(V, V - y) \\
 \nwarrow \cong & \downarrow k_i & \downarrow \cong \\
 H_n(S^n, S^n - x_i) & \xleftarrow{p_i} H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) & \xrightarrow{f_*} H_n(S^n, S^n - y) \\
 \nwarrow \cong & \uparrow j & \uparrow \cong \\
 & H_n(S^n) & \xrightarrow{f_*} H_n(S^n)
 \end{array}$$

Los homomorfismos k_i y p_i son los inducidos por las inclusiones pertinentes. El isomorfismo de la parte superior izquierda viene dado por el Teorema de Excisión 2.3.2 tomando $X = S^n$, $A = S^n - x_i$ y $B = U_i$; es claro que $X = \text{int}(A) \cup \text{int}(B)$ lo que induce el isomorfismo que queremos. El isomorfismo de arriba a la derecha también viene del Teorema de Excisión 2.3.2 tomando $X = S^n$, $A = S^n - y$ y $B = V$. Los isomorfismos de la parte inferior vienen dados por la sucesión exacta larga de $(S^n, S^n - y)$, análogo para x_i , ya que tenemos

$$\{0\} = \tilde{H}_n(S^n - y) \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n) \longrightarrow \tilde{H}_n(S^n, S^n - y) \longrightarrow \tilde{H}_{n-1}(S^n - y) = \{0\}$$

para $n \geq 1$, ya que $S^n - y$ es contráctil para todo n . A través de estos cuatro isomorfismos, los grupos de arriba podemos identificarlos con $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, por lo que el homomorfismo superior f_*

podemos interpretarlo como la multiplicación por un entero. A este entero es a lo que llamamos grado local.

Problemos la igualdad del enunciado. El Teorema de Excisión 2.3.2, tomando $A = S^n - f^{-1}(y)$ y $B = \bigcup_i U_i$, nos dice que $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y)) \cong H_n(\bigcup_i U_i, \bigcup_i U_i - x_i) \cong \bigoplus_i H_n(U_i, U_i - x_i)$, donde se está usando que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Nótese que el que $U_i \cap U_j = \emptyset$ si $i \neq j$ implica que $p_j k_i = 0$, si $i \neq j$; ya que si un n -símplice singular está en $H_n(U_i, U_i - x_i)$, su imagen está contenida en U_i y tenemos que $U_i \subset S^n - x_j$, para $i \neq j$. Por otro lado, sabemos que $p_i k_i$ es un isomorfismo, por lo que p_i es sobreyectiva y k_i es inyectiva. Más aún, lo que ocurre es que p_i es la proyección en la "coordenada" i -ésima de $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y))$ y k_i es la inclusión de \mathbb{Z} en la coordenada i -ésima. Si identificamos todos los grupos del diagrama con \mathbb{Z} , excepto $H_n(S^n, S^n - f^{-1}(y))$, la conmutatividad del diagrama nos dice que $p_i j(1) = 1$, por lo que $j(1) = (1, 1, \dots, 1) = \sum_i k_i(1)$. La conmutatividad del cuadrado superior nos dice que la aplicación f_* del medio lleva $k_i(1)$ a $\deg(f, x_i)$, por lo tanto $\sum_i k_i(1) = j(1)$ va a $\sum_i \deg(f, x_i)$. El que el cuadrado inferior sea conmutativo termina de probar la igualdad. \square

Ahora que sabemos calcular $\deg(f)$, lo aprovecharemos para calcular d_n . Se cumple que

$$d_n(e_\alpha^n) = \sum_\beta d_{\alpha\beta} e_\beta^{n-1} \quad (3.1)$$

Donde $d_{\alpha\beta}$ es el grado de la aplicación $S_\alpha^{n-1} \rightarrow X^{n-1} \rightarrow S_\beta^{n-1}$ fruto de componer φ_α (recordemos que esta es la aplicación que "pega" e_α^n a X^{n-1}) y la aplicación cociente de identificar todos los puntos en $X^{n-1} \setminus e_\beta^{n-1}$. La idea para probar esta igualdad es calcular cómo es la proyección de $d_n(e_\alpha^n)$ en cada una de las "coordenadas" de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, recordemos que ese grupo es libre, abeliano y con tantos generadores como $(n-1)$ -celdas. Para ver que esta fórmula es cierta usaremos el siguiente diagrama conmutativo, cuyos elementos determinamos a continuación.

$$\begin{array}{ccccc} H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) & \xrightarrow[\cong]{\partial} & H_{n-1}(\partial D_\alpha^n) & \xrightarrow{\Delta_{\alpha\beta*}} & H_{n-1}(S_\beta^{n-1}) \\ \downarrow \Phi_{\alpha*} & & \downarrow \varphi_{\alpha*} & & \uparrow q_{\beta*} \\ H_n(X^n, X^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X^{n-1}) & \xrightarrow{q_*} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \\ & \searrow d_n & \downarrow j_{n-1} & & \downarrow \cong \\ & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) & \xrightarrow{\cong} & H_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2}) \end{array}$$

Nótese que $\partial : H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n) \rightarrow H_{n-1}(\partial D_\alpha^n)$ y $\partial_n : H_n(X^n, X^{n-1}) \rightarrow H_{n-1}(X^{n-1})$ son trozos de las sucesiones exactas largas asociadas a $(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$ y a (X^n, X^{n-1}) , respectivamente. Φ_α es la aplicación característica de e_α^n y φ_α es la aplicación asociada a e_α^n que usamos al construir el CW complejo. La aplicación $q : X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ es la aplicación cociente, por lo que q_* es el homomorfismo inducido por esta. La aplicación $q_\beta : X^{n-1}/X^{n-2} \rightarrow S_\beta^{n-1}$ es el cociente que colapsa el complementario de e_β^{n-1} en un punto, donde estamos identificando $D_\beta^{n-1}/\partial D_\beta^{n-1}$ con S_β^{n-1} a través de Φ_β . La aplicación $\Delta_{\alpha\beta}$ es igual a la composición $q_\beta \circ q \circ \varphi_\alpha$, es decir, la composición de la aplicación que adhiere e_α^n a X^{n-1} , seguida del cociente $X^{n-1} \rightarrow X^{n-1}/X^{n-2}$ que colapsa el complementario de e_β^{n-1} a un único punto.

La aplicación $\Phi_{\alpha*}$ lleva un generador $[i_{D_\alpha^n}] \in H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$ al generador de $H_n(X^n, X^{n-1})$ asociado a e_α^n (el cual denotaremos también por e_α^n), estamos usando (1) de 3.2.1 y que $D^n \cong \Delta^n$ que, junto con el Ejemplo 2.3.4, nos dice que $H_n(D_\alpha^n, \partial D_\alpha^n)$ es un grupo cíclico generado por $i_{D_\alpha^n} = \Psi \circ i_n$; siendo Ψ el homeomorfismo de $D^n/\partial D^n$ en $\Delta^n/\partial \Delta^n$ y $i_n : \Delta^n \rightarrow \Delta^n$ la identidad. El diagrama nos dice que $d_n(e_\alpha^n) = j_{n-1} \varphi_{\alpha*} \partial[i_{D_\alpha^n}]$. En términos de la base de $H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$, la aplicación $q_{\beta*}$ (compuesta con los isomorfismos pertinentes) lo que hace es proyectar sobre la componente que viene generada por e_β^{n-1} . A partir de esto, para ver que 3.1 es cierta, basta usar que el diagrama es conmutativo. En efecto, la "coordenada" de $d_n(e_\alpha^n) = d_n \phi_{\alpha*}(i_{D_\alpha^n})$ respecto de e_β^{n-1} es igual a $\Delta_{\alpha\beta} \partial(i_{D_\alpha^n})$.

3.3. Ejemplos

En esta sección nos dedicaremos a calcular los grupos de homología asociados a algunos espacios topológicos muy comunes.

Ejemplo 3.3.1. Grupos de homología de una superficie cerrada.

Empezamos con las superficies orientables. Es conocido que una superficie de género g puede construirse como un polígono de $2g$ lados, identificando sus lados opuestos conservando la orientación. También sabemos que en este proceso se identifican todos los vértices del polígono. Esto en términos de CW complejos se traduce en que tenemos una 0-celda, $2g$ 1-celdas y una 2-celda. Más concretamente, tenemos que X^0 es un punto, X^1 es la suma en cuña de $2g$ copias de S^1 y al pasar de X^1 a X^2 lo que hacemos es identificar el borde de D^2 con X^1 recorriendo cada 1-celda dos veces, una en cada sentido. Entonces, $d_1 = 0$ ya que sólo tenemos una 0-celda y ya sabemos que $H_0(S) = \mathbb{Z}$, por ser una superficie un espacio conexo por caminos. Para ver que $d_2 = 0$, veamos que $\deg(\Delta_{\alpha\beta}) = 0$ para todo β . Fijamos un β , sea $y \in S^1$. Es claro que $\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$, siendo además x_1 y x_2 antipodales. Si tomamos H_1 y H_2 los hemisferios abiertos que contienen a x_1 y a x_2 , respectivamente, tenemos que $\Delta_{\alpha\beta} : H_i \rightarrow S^1 - z$ es un homeomorfismo, donde z es el punto al que va el borde de H_i . Con esto, $\deg(\Delta_{\alpha\beta}, x_i) = \pm 1$. Por construcción $\deg(\Delta_{\alpha\beta}, x_1) = 1$ si y sólo si $\deg(\Delta_{\alpha\beta}, x_2) = -1$, ya que $\Delta_{\alpha\beta}|_{H_1} = g \circ \Delta_{\alpha\beta}|_{H_2}$, donde g es una reflexión por la recta que contiene a y . Por tanto, $\deg(\Delta_{\alpha\beta}) = 0$, con lo que $d_2 = 0$ y $H_1(X) \cong Z^{2g}$, $H_2(X) \cong \mathbb{Z}$.

Ahora hacemos el caso no orientable. Otra vez, sabemos que toda superficie no orientable de género g puede construirse como un polígono con g lados en el que identificamos cada lado consigo mismo en sentido contrario. En términos de CW complejos, lo que hacemos es partir de un punto, añadimos g 1-celdas y luego pegamos una 2 celda recorriendo cada 1-celda dos veces en el mismo sentido. Repitiendo el mismo argumento que hemos hecho en el caso orientable, es claro que $d_1 = 0$ y que al calcular d_2 obtenemos que $\deg(\Delta_{\alpha\beta}) = \pm 2$, para cada β . Si escogemos como generadores de $H_1(X^1, X^0) \cong \mathbb{Z}^g$ los elementos correspondientes a $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $(1, 1, \dots, 1)$ tenemos que $H_1(X) \cong \mathbb{Z}^{g-1} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Además también tenemos que d_2 es inyectiva, por lo que $H_2(X) = \{0\}$. Con este ejemplo se puede ver que la homología con coeficientes en \mathbb{Z} ofrece una información que se pierde al tomar coeficientes en \mathbb{F}_2 . Con el Teorema 2.4.12, el Teorema 2.4.8, el Corolario 2.4.9 y la Proposición 2.4.13 tenemos que, denotando por X una superficie cerrada de género $2k + 1$, $H_1(X; \mathbb{F}_2) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{2k}$; por lo que es indistinguible si es orientable o no, con este método.

Ejemplo 3.3.2. Grupos de homología de los espacios proyectivos real y complejo. Empecemos construyendo el espacio proyectivo real de dimensión n , $\mathbb{R}P^n$, como un CW complejo. Usualmente se define $\mathbb{R}P^n$ como el conjunto de rectas vectoriales de \mathbb{R}^{n+1} , aunque es conocido que esto es equivalente a S^n / \sim , con \sim la relación inducida por la aplicación antipodal. Esto es equivalente al espacio cociente de un hemisferio D^n con los puntos en ∂D^n identificados con su antípoda. Como ∂D^n con los puntos antipodales identificados es $\mathbb{R}P^{n-1}$, tenemos que podemos construir $\mathbb{R}P^n$ a partir de $\mathbb{R}P^{n-1}$ adjuntándole una n -celda; mediante la aplicación $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ que viene de hacer el cociente S^{n-1} / \sim (identificando los puntos antipodales) y, como ya se dijo, $S^{n-1} / \sim = \mathbb{R}P^{n-1}$. Con esto tenemos que, por inducción, $\mathbb{R}P^n$ tiene una estructura como CW complejo con una celda de cada dimensión, desde 0 hasta n . Si repetimos el mismo argumento para el caso complejo, tenemos que tiene una celda por cada dimensión par. Esto nos dice que, necesariamente,

$$H_k(\mathbb{C}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ es impar} \\ \mathbb{Z} & \text{si } k \text{ es par y } k \leq n \end{cases}$$

En cuanto al caso real, es claro que $d_1 = 0$. Para calcular d_{k-1} , con $2 < k \leq 2n$, repetimos un argumento similar al del ejemplo previo. En el Ejemplo 3.3.1 se vio que $\Delta_{\alpha\beta}^{-1}(y) = \{x_1, x_2\}$ y que $\deg(\Delta_{\alpha\beta}) = \pm 1$. Con el mismo argumento vemos que esto se sigue cumpliendo, para cada k . En el caso previo, se cumplía que $\Delta_{\alpha\beta}|_{H_1} = g \circ \Delta_{\alpha\beta}|_{H_2}$ y ahora se sigue cumpliendo, tan sólo que ahora g es la aplicación antipodal en S^{k-1} . Por ello, $\deg(\Delta_{\alpha\beta}) = \pm(1 + (-1)^k)$. Con esto, $\deg(q\phi) = 0$ si k es impar y $\deg(q\phi) = \pm 2$ si k es par. Lo que se traduce en

$$H_k(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0 \text{ o si } k = n \text{ con } n \text{ impar} \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{si } k \text{ es impar, } 0 < k < n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Capítulo 4

Teoría de Morse

La teoría de Morse aporta ciertas herramientas que permiten conectar la homología con las muestras de puntos. Como nuestro objetivo en este trabajo es trazar un camino desde los fundamentos de la homología hacia el análisis topológico de datos, nos resultará conveniente estudiar qué relación tienen los puntos críticos de una función de Morse con los grupos de homología. Empezaremos este capítulo cubriendo algunos resultados de geometría diferencial necesarios para poder hablar de teoría de Morse en la siguiente sección. Se darán por básicos los contenidos de la asignatura 'Variedades Diferenciables'. Los contenidos de este capítulo se han sacado de la Parte I de [14], pág 1-19, salvo los que se han sacado de la asignatura 'Variedades Diferenciables'.

4.1. Trabajo previo de geometría diferencial

Pese a que se darán por conocidos los contenidos de geometría diferencial dados en la carrera, enunciaremos el resultado de existencia de funciones meseta para establecer la notación con la que trabajaremos y porque usaremos explícitamente este resultado.

Lema 4.1.1. *Sean M una variedad diferenciable, $A \subset M$, A cerrado. Dado U un entorno abierto de A , existe una función diferenciable $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_A \equiv 1$, $f|_{M-U} \equiv 0$ y $f(p) \geq 0$, $\forall p \in M$. A estas funciones se las denomina **funciones meseta**.*

Y, por los mismos motivos, enunciaremos la ley de cambio de cartas.

Lema 4.1.2. *Sean x e y cartas de una variedad diferenciable M con dominios de cartas de intersección no vacía. Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se cumple que:*

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

*Esta igualdad se conoce como la **ley del cambio de cartas**. Nótese que se está usando el convenio de sumación de Einstein.*

Con lo que ya empezamos nuestro estudio. Si en un cierto punto $p \in M$ se da que $\frac{\partial f}{\partial x^i} = 0$, para todo i con $1 \leq i \leq n$, decimos que p es un **punto crítico** de f . Diremos que p es un punto crítico **no degenerado** si la matriz Hessiana H con coordenadas $H_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ no es singular en p , es decir, si $\det(H(p)) \neq 0$. Llamaremos **índice** de f en p , siendo p un punto crítico no degenerado, a la dimensión del mayor subespacio lineal en el que $H(p)$ es definida negativa. Con el siguiente resultado comprobamos que esta definición es *buena*, en el sentido de que no depende de la carta escogida.

Proposición 4.1.3. *La singularidad (o regularidad) del Hessiano evaluado en un punto crítico no depende de la carta escogida. El índice de un punto crítico no degenerado tampoco depende de la carta escogida.*

Demostración. Si derivamos directamente la igualdad que tenemos por la ley del cambio de cartas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^k \partial y^i} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^k} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^l}$$

Como evaluamos en un punto crítico, tenemos que el primer sumando se anula. Pasando esta igualdad a una forma matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y^1 \partial y^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^n \partial y^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial y^n \partial y^n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial y^n} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n} \end{pmatrix}$$

Como $x \circ y^{-1}$ es difeomorfismo, la primera matriz del segundo término debe tener rango máximo, es decir, determinante no nulo. Como el cuadrado de una matriz simétrica no singular es definido positivo, tenemos que el índice no depende de la carta escogida. \square

Ahora que ya sabemos lo que es un punto crítico, vamos a dar unos cuantos lemas que necesitaremos.

Lema 4.1.4. *Sea f una función de clase C^∞ en un entorno convexo V del origen en \mathbb{R}^n , con $f(0) = 0$. Entonces*

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$$

para unas ciertas funciones g_i de clase C^∞ tales que $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$.

Demostración. Denotando $t \cdot f(x_1, \dots, x_n) = f(tx_1, \dots, tx_n)$ se tiene, por el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena que

$$f(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt$$

Por lo que podemos tomar $g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt$. \square

Lema 4.1.5 (Lema de Morse). *Sea p un punto crítico no degenerado de f . Entonces existe una carta $y = (y^1, \dots, y^n)$ con un dominio U , con $p \in U$, tal que $y^i(p) = 0$ para todo i y tal que la igualdad*

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

es cierta en todo U , donde λ es el índice de f en p .

Demostración. Primero probamos que si existe tal expresión de f , entonces λ es el índice de f en p . Para una carta cualquiera (z^1, \dots, z^n) , si

$$f = f(p) - (z^1)^2 - \dots - (z^\lambda)^2 + (z^{\lambda+1})^2 + \dots + (z^n)^2$$

entonces

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2 & \text{si } i = j \leq \lambda \\ 2 & \text{si } i = j > \lambda \\ 0 & \text{cualquier otro caso} \end{cases}$$

Lo cual nos dice que la matriz Hessiana de f respecto de la base $\frac{\partial}{\partial z^1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}(p)$ es diagonal, con los λ primeros términos de la diagonal iguales a -2 y el resto iguales a 2 . Esto nos dice que existe un subespacio V de dimensión λ en el que la matriz del Hessiano es definida negativa y otro subespacio W de dimensión $n - \lambda$ en el que es definida positiva. Si existiera un subespacio de dimensión mayor que λ en el que fuese definida negativa, tendríamos que ese subespacio tendría intersección no nula con W lo cual sería una contradicción. Por lo tanto λ es el índice de f en p .

Ahora probemos que existe tal carta. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $f(p) = f(0) = 0$. Estamos en las condiciones del Lema 4.1.4, por lo que podemos escribir $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n)$. Como $p = 0$, $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$. Por esta razón, estamos en condiciones de volver a aplicar el Lema 4.1.4 y tenemos que $g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ para unas

ciertas funciones diferenciables h_{ij} . Se sigue que $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n)$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $h_{ij} = h_{ji}$ porque podemos escribir $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ teniendo así que $\bar{h}_{ij} = \bar{h}_{ji}$ y manteniendo que $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j \bar{h}_{ij}(x_1, \dots, x_n)$. Es más, por construcción tenemos que la matriz de coordenadas $\bar{H} = (\bar{h}_{ij}(0))$ es igual a $(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(0))$, es decir, es igual a la mitad de la matriz Hessiana. Por hipótesis tenemos que no es singular. Veamos por inducción que existe una carta que cumple lo que queremos.

Nuestra hipótesis de inducción es que existe una carta (u_1, \dots, u_n) tal que

$$f = \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

en algún entorno de p , donde la matriz $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$ es simétrica. Dado que no es singular, en particular tenemos que ninguna de sus filas es completamente nula. En particular, la r -ésima no puede ser nula. Por esta razón, con un cambio en las últimas $n - r + 1$ coordenadas tenemos que podemos suponer que $H_{rr}(0) \neq 0$. Denotemos, por simplificar la notación, $g(u_1, \dots, u_n) = (|H_{rr}|)^{1/2}$. Tenemos que g es una función diferenciable y distinta de 0 en algún entorno de p . Definimos una nueva carta como

$$\begin{aligned} v_i &= u_i \text{ si } i \neq r \\ v_r(u_1, \dots, u_n) &= g(u_1, \dots, u_n) \left[u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right] \end{aligned}$$

Por el Teorema de la Función Inversa tenemos que v_1, \dots, v_n es una carta de M para un entorno de p . Para comprobar que esta elección de carta es la correcta, notemos que

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j \geq r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \\ &= (u_r)^2 h_{rr}(u_1, \dots, u_n) + u_r \sum_{j>r} u_j h_{rj}(u_1, \dots, u_n) + u_r \sum_{i>r} u_i h_{ir}(u_1, \dots, u_n) + \\ &+ \sum_{i,j>r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) = (u_r)^2 h_{rr} + 2u_r \sum_{i>r} u_i h_{ir}(u_1, \dots, u_n) + \sum_{i,j>r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) \\ &= (v_r/g - \sum_{i>r} u_i h_{ir}/h_{rr})^2 h_{rr} + 2u_r \sum_{i>r} u_i h_{ir}(u_1, \dots, u_n) + \sum_{i,j>r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \pm(v_r)^2 + (\sum_{i>r} u_i h_{ir})^2 / h_{rr} - 2 \frac{v_r}{g} (\sum_{i>r} u_i h_{ir}) + 2u_r \sum_{i>r} u_i h_{ir}(u_1, \dots, u_n) + \\ &+ \sum_{i,j>r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) = \pm(v_r)^2 + (\sum_{i>r} u_i h_{ir})^2 / h_{rr} - \\ &- 2 \frac{\sum_{i>r} u_i h_{ir}}{g} g \left[u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{h_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{h_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right] + 2u_r \sum_{i>r} u_i h_{ir}(u_1, \dots, u_n) + \sum_{i,j>r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \pm(v_r)^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j H'_{ij}(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

Por lo que tenemos que:

$$\begin{aligned} f &= \pm(u_1)^2 \pm \dots \pm (u_{r-1})^2 + \sum_{i,j \geq r} u_i u_j h_{ij}(u_1, \dots, u_n) \\ &= \pm(v_1)^2 \pm \dots \pm (v_{r-1})^2 + \pm(v_r)^2 + \sum_{i,j>r} v_i v_j h'_{ij}(v_1, \dots, v_n) \end{aligned}$$

□

Corolario 4.1.6. *Los puntos críticos no degenerados están aislados.*

Demostración. El Lema 4.1.5 nos dice que si p es un punto crítico no generado entonces existe un entorno V tal que

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \dots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \dots + (y^n)^2$$

en V , y es claro que el único punto en el que se anulan todas las derivadas parciales de la derecha es en el 0, que se corresponde con p . □

4.2. Teoría de Morse

El objeto principal de estudio de la teoría de Morse son las funciones de Morse, por lo que empezamos definiendo este concepto.

Definición 4.2.1. Sea M una variedad diferenciable y sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable. Se dice que f es una **función de Morse** si no tiene puntos críticos degenerados.

Para probar los dos resultados de teoría de Morse que nos interesan en este trabajo necesitaremos la noción de grupo 1-paramétrico generado por un campo vectorial, por lo que empezamos definiendo esta noción.

Definición 4.2.2. Sea M una variedad diferenciable, un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos es una aplicación diferenciable $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que:

1. Para cada $t \in \mathbb{R}$ la aplicación $\phi_t : M \rightarrow M$ definida como $\phi_t(p) = \phi(t, p)$ es un difeomorfismo.
2. Para todo $t, s \in \mathbb{R}$ se cumple que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$.

Este concepto está fuertemente ligado al de campo vectorial, tanto es así que dado un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos de M podemos definir el siguiente campo vectorial:

$$X_p(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\phi_h(p)) - f(p)}{h}$$

Donde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable. Decimos que este campo vectorial genera el grupo ϕ . De forma análoga, y bajo ciertas condiciones, podemos definir un grupo 1-paramétrico de difeomorfismos a partir de un campo vectorial.

Lema 4.2.3. Un campo vectorial en M que se anula en el complementario de un subconjunto compacto $K \subset M$ genera un único grupo 1-paramétrico de difeomorfismos en M .

Demostración. Dada una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ diferenciable, definimos el vector velocidad $\frac{dc}{dt} \in TM_{c(t)}$ como

$$\frac{dc}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}$$

Veamos qué condiciones deben satisfacerse para la existencia y unicidad de un grupo de difeomorfismos. Sea ϕ un grupo de difeomorfismos generado por X . Entonces, para cada punto p , la curva $\phi_t(p)$ satisface la ecuación diferencial $\frac{d\phi_t(p)}{dt} = X_{\phi_t(p)}$ y la condición inicial $\phi_0(p) = p$. Esto es cierto porque

$$\frac{d\phi_t(p)}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\phi_{t+h}(p)) - f(\phi_t(p))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\phi_h(q)) - f(q)}{h} = X_q(f)$$

donde $q = \phi_t(p)$. Sabemos que esta ecuación tiene una única solución (diferenciable) definida en un entorno de p . Esto es, sabemos que existen $U \subset M$ y $\epsilon > 0$ tales que la ecuación $\frac{d\phi_t(p)}{dt} = X_{\phi_t(p)}$ tiene una única solución diferenciable para $p \in U$ y $|t| < \epsilon$. Veamos que, por las hipótesis del enunciado, esta solución se extiende de forma única a M .

Es claro que, como para cada $p \in K$ existe un abierto U_p que cumple lo previo, $\{U_p\}_{p \in K}$ es un recubrimiento abierto de K . Como K es compacto, existe un sobrecubrimiento finito, es decir, una cantidad finita de abiertos U_p que cubren todo K . Cada uno de estos abiertos U_p tiene asociado, por lo previo, un $\epsilon_p > 0$. Sea ϵ_0 el menor de ellos. Si imponemos la condición $\phi_t(p) = p$ para $p \notin K$, tenemos que esta ecuación diferencial tiene una única solución $\phi_t(p)$ para $|t| < \epsilon_0$ y para todo $q \in M$. Esta solución es diferenciable en ambas variables. Además, si $|t|, |s|, |t+s| < \epsilon_0$, por construcción tenemos que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Con esto, tan sólo nos queda extender ϕ_t para $|t| \geq \epsilon_0$. Es claro que todo número real t puede expresarse de forma única como un múltiplo de $\epsilon_0/2$ más un resto r , con $|r| < \epsilon_0/2$. Denotemos $t = k(\epsilon_0/2) + r$, con $k \geq 0$, y definamos

$$\phi_t = \overbrace{\phi_{\epsilon_0/2} \circ \phi_{\epsilon_0/2} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon_0/2}}^k \circ \phi_r$$

El caso con $t < 0$ es análogo, basta cambiar cada $\phi_{\epsilon_0/2}$ por $\phi_{-\epsilon_0/2}$. Como la composición de funciones diferenciables es diferenciable, esta forma de extender ϕ_t es diferenciable. Veamos que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Denotemos $t = k(\epsilon_0/2) + r$ y $s = k'(\epsilon_0/2) + r'$. Si $k, k' \geq 0$, entonces

$$\phi_t \circ \phi_s = \overbrace{\phi_{\epsilon_0/2} \circ \phi_{\epsilon_0/2} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon_0/2}}^k \circ \phi_r \circ \overbrace{\phi_{\epsilon_0/2} \circ \phi_{\epsilon_0/2} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon_0/2}}^{k'} \circ \phi_{r'}$$

Y, por definición,

$$\phi_{t+s} = \overbrace{\phi_{\epsilon_0/2} \circ \phi_{\epsilon_0/2} \circ \dots \circ \phi_{\epsilon_0/2}}^{k+k'} \circ \phi_r \phi_{r'}$$

Por lo que tenemos que ver que $\phi_r \circ \phi_{\epsilon_0/2} = \phi_{\epsilon_0/2} \circ \phi_r$ para todo $|r| < \epsilon_0/2$. Sin embargo, esto ya lo sabemos ya que $|r|, \epsilon_0/2, r + \epsilon_0/2 < \epsilon_0$ por lo que $\phi_r \circ \phi_{\epsilon_0/2} = \phi_{r+\epsilon_0/2} = \phi_{\epsilon_0/2} \circ \phi_r$ y con esto terminamos el caso con $k, k' \geq 0$. Los casos restantes se prueban repitiendo el mismo argumento y cambiando $\epsilon_0/2$ por $-\epsilon_0/2$ donde sea pertinente. \square

Ahora, por fin, podemos atacar los dos resultados de teoría de Morse por los que se incluye este capítulo en este trabajo. El primero de ellos nos dice que cuando una función de Morse no pasa por un punto crítico el tipo de homotopía de las hipersuperficies de nivel se mantiene. Denotaremos por $M_a = f^{-1}(-\infty, a]$.

Teorema 4.2.4. *Sea f una función diferenciable definida en una variedad Riemanniana M . Sea $a < b$ y supongamos que $f^{-1}([a, b])$ es compacto y no tiene ningún punto crítico de f . Entonces M_a es difeomorfa a M_b . De hecho, M_a es retracto de deformación de M_b .*

Demostración. Denotaremos por $\langle X, Y \rangle$ el producto escalar de dos campos vectoriales de M . El gradiente de f es el campo vectorial caracterizado por la igualdad $\langle X, \nabla f \rangle = X(f)$ para cualquier campo X . Se cumple que $\nabla f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}$. Por ello, tenemos que para una curva $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ se cumple que $\langle \frac{dc}{dt}, \nabla f \rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}$. Sea $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función meseta de $f^{-1}([a, b])$, es decir, constantemente 1 en $f^{-1}([a, b])$ y 0 fuera de un entorno compacto de este conjunto. Definimos $\rho : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $\rho = \frac{\lambda}{\langle \nabla f, \nabla f \rangle}$. Entonces el campo vectorial X definido como $X_p(f) = \rho(p)(\nabla f)_p$ satisface las condiciones del Lema 4.2.3. Por ello, X genera un grupo de difeomorfismos. Fijado un $q \in M$ consideramos la función $f(\phi_t(q))$. Si la imagen de $\phi_t(q)$ está en el conjunto $f^{-1}([a, b])$, entonces

$$\frac{df(\phi_t(q))}{dt} = \langle \frac{d\phi_t(q)}{dt}, \nabla f \rangle = \langle X, \nabla f \rangle = 1$$

Por lo que $f(\phi_t(q))$ es lineal con derivada igual a 1 si $a < f(\phi_t(q)) < b$. Consideremos la aplicación $\phi_{b-a} : M \rightarrow M$, hemos visto que es un difeomorfismo de M_a en M_b ; lo que prueba la primera parte de 4.2.4. Para mostrar que M_a es retracto de deformación de M_b , definimos

$$r_t = M_b \rightarrow M_b$$

como

$$r_t(p) = \begin{cases} p & \text{si } f(p) \leq a \\ \phi_{t(a-f(p))}(p) & \text{si } a \leq f(p) \leq b \end{cases}$$

A partir de esta definición, es claro que r_0 es la identidad, r_1 es una retracción de M_b a M_a y si $f(p) = a$ entonces $r(p) = p$, por lo que $r|_{M_a} = id_{M_a}$; lo que nos dice que r_t es una homotopía entre r_0 y r_1 que deja M_a invariante. Esto es, r_t es la homotopía que nos dice que M_a es retracto de deformación de M_b . \square

Por otra parte, el siguiente teorema nos dice lo que ocurre cuando una función de Morse pasa por un punto crítico no degenerado. Lo que pasa es que el tipo de homotopía va a cambiar.

Teorema 4.2.5. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, sea p un punto crítico no degenerado de f con índice λ . Considerando $f(p) = c$, supongamos que $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ es compacto y no tiene otros puntos críticos aparte de p , para algún $\epsilon > 0$. Entonces, para un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos que $M_{c+\epsilon}$ tiene el mismo tipo de homotopía que el resultado de pegar una λ -celda a $M_{c-\epsilon}$.*

Demostración. Por el Lema 4.1.5, podemos tomar $u = (u^1, \dots, u^n)$ y $U \subset M$ una carta y su dominio tales que $f = c - (u^1)^2 - \dots - (u^\lambda)^2 + (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$ en U . Entonces, $u^1(p) = \dots = u^n(p) = 0$. Sea $\epsilon > 0$ lo bastante pequeño como para que $f^{-1}([c - \epsilon, c + \epsilon])$ sea compacto y no tenga otros puntos críticos a parte de p y tal que $im(u)$ contenga la bola cerrada $\{(u^1, \dots, u^n) \in \mathbb{R}^n : \sum_i (u^i)^2 \leq 2\epsilon\}$. Lo primero es posible por el Corolario 4.1.6 y lo segundo por ser $im(u)$ abierto, por definición para cada $x \in im(u)$ existe un ϵ tal que $B(x, \epsilon) \subset im(u)$. Basta entonces tomar $\frac{\epsilon}{4}$ del menor ϵ que se necesite para cada condición y tenemos el ϵ que cumple ambas afirmaciones.

Para continuar, construimos una función $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera. Sea $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^∞ tal que $\mu(0) > \epsilon$, $\mu(r) = 0$ para todo $r \geq 2\epsilon$ y que $-1 < \mu'(r) \leq 0$ para todo r , donde $\mu'(r) = \frac{d\mu}{dr}(r)$. Sea $F = f$ en $M \setminus U$ y sea $F = f - \mu((u^1)^2 - \dots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u^n)^2)$

en U . F está bien definida y es diferenciable, por ser suma y composición de funciones diferenciables. Se definen también las funciones $\xi, \eta : U \rightarrow [0, \infty)$ como $\xi = (u^1)^2 - \dots + (u^\lambda)^2$ y $\eta = (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2$. Es claro que $f = c - \xi + \eta$ y que $F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q))$ para todo $q \in U$. Es cierto que la región $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$ coincide con $M_{c+\epsilon}$. Para verlo, fuera del elipsoide $\xi + 2\eta \leq 2\epsilon$ es obvio f y F coinciden. Dentro del elipsoide tenemos que $F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \xi + \eta \leq c + \epsilon$, por lo que tenemos la igualdad entre los dos conjuntos. También es cierto que los puntos críticos de F y de f coinciden. Por construcción de F , basta calcular sus puntos críticos en U , ya que fuera de U es igual a f . Con un cálculo directo, tenemos que

$$\frac{\partial F}{\partial u^i} = \begin{cases} -2t^i - \mu'(\xi + 2\eta)2t^i & \text{si } 1 \leq i \leq \lambda \\ 2t^i - \mu'(\xi + 2\eta)2t^i & \text{si } \lambda + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

donde (t^1, \dots, t^n) son las coordenadas en \mathbb{R}^n . Como $-1 - \mu' \leq -1 < 0$, tenemos que en el primer caso sólo se anula si $t^i = 0$. De forma análoga, como $1 - 2\mu' \geq 1 > 0$, tenemos que en el segundo caso sólo se anula si $t^i = 0$. Por lo tanto el único punto crítico en U es el origen; con lo que tenemos que F tiene los mismos puntos críticos que f . Consideremos ahora la región $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Sabemos, por lo previo y por ser $F \leq f$, que $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon] \subset f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Por ello $F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$ es compacto. Además, no puede tener ningún punto crítico salvo p pero $F(p) = c - \mu(0) < c - \epsilon$, por lo que $p \notin F^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$. Estamos en condiciones de aplicar el Teorema 4.2.4 y, por ello, tenemos que $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$ es un retracto de deformación de $M_{c+\epsilon}$. Denotamos $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon] = M_{c-\epsilon} \cup H$, donde H es la clausura de $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon] - M_{c-\epsilon}$.

Consideremos ahora la λ -celda e^λ formada por los puntos $q \in M$ tales que $\xi(q) \leq \epsilon$ y $\eta(q) = 0$. Veamos que $e^\lambda \subset M_{c-\epsilon} \cup H$. Si $q \in e^\lambda$, $F(q) = c - \xi(q) - \mu(\xi(q)) \leq c - \epsilon$, por lo tanto $q \in F^{-1}(-\infty, c - \epsilon] = M_{c-\epsilon} \cup H$. Nótese que $\xi : e^\lambda \rightarrow B(0, \epsilon)$ es un homeomorfismo, donde $B(0, \epsilon)$ representa la bola de centro 0 y radio ϵ en \mathbb{R}^λ . Si q es un punto en el borde de $B(0, \epsilon)$, por definición $\xi(q) = \epsilon$ y $\eta(q) = 0$ por lo que $f(q) = c - \epsilon$ y entonces $q \in M_{c-\epsilon}$. Por otra parte, si $\xi(q) < \epsilon$ y $\eta(q) = 0$, entonces $f(q) = c - \xi(q) > c - \epsilon$ con lo que $q \notin M_{c-\epsilon}$. Con esto tenemos que, efectivamente, e^λ es una λ -celda pegada a $M_{c-\epsilon}$. Podemos demostrar ahora que $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ es un retracto de deformación de $M_{c-\epsilon} \cup H$. Definamos $r : M_{c-\epsilon} \cup H \times I \rightarrow M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ como la identidad en $M_{c-\epsilon} \cup H - U$ y para definir su imagen en U consideramos 3 casos distintos.

Caso 1.- Sea $\xi(q) < \epsilon$, en este caso $r((u^1, \dots, u^n), t) = (u^1, \dots, u^\lambda, tu^{\lambda+1}, \dots, tu^n)$. Entonces $r(q, 1)$ es la identidad y $r(q, 0)$ manda todos los puntos a e^λ , además $r(q, t)$ deja fijos los puntos en e^λ para todo $t \in I$.

Caso 2.- Sea $\epsilon \leq \xi(q) \leq \eta(q) + \epsilon$. Definimos $r((u^1, \dots, u^n), t) = (u^1, \dots, u^\lambda, s_t^{\lambda+1} u^{\lambda+1}, \dots, s_t u^n)$ donde $s_t = t + (1 - t) \left(\frac{\xi - \epsilon}{\eta} \right)^{1/2}$. Tenemos que $r(q, 1)$ es la identidad, $r(q, 0)$ manda toda la región a $f^{-1}(c - \epsilon)$. Esto es así ya que si calculamos directamente $f(r(q, 0)) = c - \xi(q) - \left(\frac{\xi(q) - \epsilon}{\eta(q)} \right) \eta(q) = c - \epsilon$. Se sigue cumpliendo que $r(q, t)$ deja fijos los puntos de este conjunto, para todo $t \in I$. Nótese que esta definición de r coincide con la dada en el caso 1 si $\xi = \epsilon$. Comprobemos que $s_t u^i$ es continua para todo i con $\lambda + 1 \leq i \leq n$. Para ello, calculamos

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \epsilon, \eta \rightarrow 0} \left| \left(t + (1 - t) \left(\frac{\xi - \epsilon}{\eta} \right)^{1/2} \right) u^i \right| &\leq \lim_{\xi \rightarrow \epsilon, \eta \rightarrow 0} \left| \left(t + (1 - t) \left(\frac{(\eta + \epsilon) - \epsilon}{\eta} \right)^{1/2} \right) u^i \right| = \\ &= \lim_{\xi \rightarrow \epsilon, \eta \rightarrow 0} |t + (1 - t)| |u^i| = \lim_{\xi \rightarrow \epsilon, \eta \rightarrow 0} |u^i| = 0 \end{aligned}$$

Donde se está usando que $\xi \leq \eta + \epsilon$.

Caso 3.- Sea $\eta + \epsilon \leq \xi$. En este caso consideramos $r(q, t)$ como la identidad. Nótese que esta definición coincide con la dada en el caso 2 si $\xi = \eta + \epsilon$.

Por construcción, r es una homotopía entre la identidad en $M_{c-\epsilon} \cup H$ y un retracto de $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ en $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$. Por tanto, $M_{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ es un retracto por deformación de $M_{c-\epsilon} \cup H$. \square

Por el capítulo previo sabemos que añadir una λ -celda tan sólo puede afectar a los grupos de homología de dimensión λ o $\lambda - 1$. La interpretación de esto sería que al pegar un λ -celda hacemos que nuestro espacio tenga un nuevo λ -ciclo o que un $(\lambda - 1)$ -ciclo pase a ser un $(\lambda - 1)$ -borde.

Capítulo 5

Homología persistente

Una aplicación relativamente reciente de la homología "clásica" es la homología persistente, que pertenece al conjunto de técnicas propias del análisis topológico de datos. La idea inicial es ver qué ocurre cuando hacemos las bolas de radio ϵ centradas en cada punto de un conjunto de datos P y calculamos los grupos de homología de la unión de esas bolas. Ya se contó en el Capítulo 1 que, por el 'Nerve Theorem', esto es equivalente a calcular los grupos de homología de un complejo de Čech y que se puede aproximar con complejos de Rips. Sin embargo, este procedimiento lleva a preguntarnos: ¿qué ϵ escogemos? En esta línea de pensamiento está el trabajo de [16], [2] y [1], que usan métodos probabilísticos para determinar dicho ϵ . La homología persistente da la vuelta a esa pregunta, ya que lo que propone es no escoger ningún ϵ concreto. Lo que propone es estudiar qué pasa al ir incrementando ϵ de manera continua, desde un valor "pequeño", lo bastante como para que nos quede un espacio de puntos aislados; hasta un valor "grande", lo bastante como para que nos quede un espacio contráctil. De esta forma se ve que los grupos de homología van cambiando, van apareciendo elementos no triviales en cada grupo que, al seguir aumentando ϵ , se acaban volviendo triviales. Esto nos lleva a otro problema, diferenciar aquellos elementos no interesantes (que son información dependiente del muestreo o del ruido en el conjunto de puntos) de aquellos elementos interesantes (que nos dan información de la estructura de la que vienen). Este tema ya no llegaremos a tratarlo en profundidad, aunque daremos alguna intuición de lo que se ha desarrollado hasta ahora.

5.1. Primeros conceptos

Los contenidos de la primera parte de esta sección están sacados de [10]. Empezamos introduciendo algo de notación. Denotaremos por $\{K^i\}_{i \in I}$ una **filtración** de un espacio topológico X . Esto es, I es un grupo ordenado (en nuestro caso, usualmente $I = \mathbb{R}$), K_i es un subespacio topológico para cada i , si $i < j$ entonces $K^i \subset K^j$ y $\cup_i K^i = X$. Para cada i consideramos la homología de K^i . O sea, llamamos C_k^i al grupo de cadenas k -ésimo de K^i , $\partial_k^i : C_k^i \rightarrow C_{k-1}^i$ al operador borde, $Z_k^i = \ker(\partial_k^i)$ al grupo de ciclos, $B_{k-1}^i = \text{im}(\partial_k^i)$ al grupo de bordes, H_k^i al grupo de homología y $\eta^{i,j} : K^i \rightarrow K^{i+j}$ a la inclusión naturalmente definida. Nótese que $\eta^{i,j}$ induce los homomorfismos $\eta_{\#}^{i,j} : C_k^i \rightarrow C_k^{i+j}$ y $\eta_*^{i,j} : H_k^i \rightarrow H_k^{i+j}$. De hecho, $\eta_{\#}^{i,j}$ y $\eta_*^{i,j}$ son también inclusiones.

Definición 5.1.1. Definimos el k -ésimo **grupo de homología j -persistente** de K^i como:

$$H_k^{i,j} = \frac{Z_k^i}{B_k^{i+j} \cap Z_k^i}$$

Además, se define de forma natural el **número de Betti j -persistente k -ésimo** como la dimensión de este grupo.

Esta definición viene de lo que se ha dicho previamente de "estudiar qué pasa al incrementar ϵ "; para ello comparamos los grupos de homología de cada elemento de la filtración, considerando las imágenes a través de $\eta_*^{i,j}$, ya que $\eta_{\#}^{i,j}(Z_k^i) = Z_k^i$ (por ser el homomorfismo inducido por la inclusión).

Nótese que el que hagamos en la Definición 5.1.1 el módulo respecto a la intersección de Z_k^i con B_k^{i+j} se debe a que, en general, el segundo no es subgrupo del primero. De hecho, con esa idea de que el último elemento de la filtración puede ser contráctil, tenemos que hay casos en los que $Z_k^i \subsetneq B_k^{i+j}$.

A partir de aquí, los contenidos de esta sección y la siguiente se han sacado de [7], salvo que se especifique lo contrario. Para continuar introduciendo conceptos de persistencia, diremos que un elemento no trivial $\xi \in H_k^j$ *nace* en K^j si no está en $H_k^{i,j}$ para ningún $i < j$. De la misma forma, si $\xi \in H_k^i$ es un elemento no trivial, diremos que *mueren* en K^j si es no trivial en $H_k^{i,j-1}$ pero se vuelve trivial en $H_k^{i,j}$. Por tanto, podemos interpretar $\beta_k^{i,j}$ como la cantidad de elementos vivos y linealmente independientes en K^i que siguen estando vivos y siguen siendo linealmente independientes en K^j . Ahora, nos gustaría saber cuántos elementos, linealmente independientes, nacen en K^i y mueren en K^j . Para ello está el siguiente concepto.

Definición 5.1.2. Sean $i, j \in I$, con $i < j$. La multiplicidad de (i, j) de dimensión k , denotada por $\mu_k^{i,j}$, se define como

$$\mu_k^{i,j} = \beta_k^{i,j-1} - \beta_k^{i,j} - (\beta_k^{i-1,j-1} - \beta_k^{i-1,j})$$

Razonemos un poco qué representa exactamente $\mu_k^{i,j}$ con esta definición. La diferencia $\beta_k^{i,j-1} - \beta_k^{i,j}$ representa la cantidad de elementos vivos en K^i que siguen vivos en K^{j-1} menos la cantidad de elementos vivos en K^i que siguen vivos en K^j . Esta diferencia es la cantidad de elementos vivos en K^i que mueren en K^j , como hemos definido previamente. Miremos lo que representa la segunda diferencia: $\beta_k^{i-1,j-1} - \beta_k^{i-1,j}$ es, de forma análoga, la cantidad de elementos que están vivos en K^{i-1} y mueren en K^j . La diferencia entre los elementos vivos en K^i y los vivos en K^{i-1} son los que nacen en K^i . Por tanto, tenemos que $\mu_k^{i,j}$ representa la cantidad de elementos, linealmente independientes, que nacen en K^i y mueren en K^j .

Ahora que hemos trabajado un poco el caso general, nos vamos a centrar en un tipo de filtraciones: las que vienen dadas por una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Pero antes, necesitamos la siguiente noción.

Definición 5.1.3. Sea X un espacio topológico y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que un punto $a \in \mathbb{R}$ es un **punto crítico homológico** si existe un entero $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, el homomorfismo $i_* : H_k(f^{i-1}(-\infty, a - \epsilon]) \rightarrow H_k(f^{-1}(-\infty, a + \epsilon])$ inducido por la inclusión no es un isomorfismo.

Por los Teoremas 4.2.4 y 4.2.5 sabemos que, en el caso de funciones de Morse definidas sobre un espacio compacto, estos puntos críticos homológicos se corresponden con el valor de sus puntos críticos "clásicos". Para trabajar en un contexto más general, decimos que una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es **dócil** si tiene una cantidad finita de puntos críticos homológicos y si $H_k(f^{-1}(-\infty, a])$ es de dimensión finita, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y para todo $a \in \mathbb{R}$. Denotaremos por $F_x = H_k(f^{-1}(-\infty, x])$ y por $f_x^y : F_x \rightarrow F_y$ el homomorfismo inducido por la inclusión. Usaremos como convenio que $F_x^y = \{0\}$ si x o y son infinito. De aquí en adelante, se considera que estamos trabajando con un k fijo, por lo que en ocasiones omitiremos los subíndices. Se denotará por $\{a_i\}_{1 \leq i \leq n}$ el conjunto de puntos críticos de f y por $\{b_i\}_{0 \leq i \leq n}$ un conjunto tal que $b_{i-1} < a_i < b_i$, para todo i . Definimos $b_{-1} = a_0 = -\infty$ y $b_{n+1} = a_{n+1} = +\infty$.

Veamos que, aunque no podamos usar en este caso el Teorema 4.2.4 para ver que la homología no cambia al tomar distintas elecciones de b_i ; podemos probar un resultado que, en este contexto, le sustituye.

Lema 5.1.4. Sea $[x, y] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado. Si no contiene ningún punto crítico homológico, f_x^y es un isomorfismo.

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que f_x^y no es un isomorfismo, para algún k . Entonces, si consideramos $m = (x + y)/2$, es claro que $f_x^y = f_m^y \circ f_x^m$ y por ello alguno de f_m^y o f_x^m no es un isomorfismo. Si iteramos este proceso veces, obtenemos una sucesión de intervalos $[x, y] \supsetneq \dots \supsetneq [a, b] \supsetneq \dots$ de longitud $(x + y)/2^n$ en cada paso. Es claro que esta sucesión converge necesariamente a un punto crítico homológico, contradiciendo nuestra hipótesis. \square

Nótese que las sucesiones $\{a_i\}$ y $\{b_i\}$ nos determinan una filtración de X , tomando $K^i = f^{-1}(-\infty, a_i]$ o, análogamente, $K^i = f^{-1}(-\infty, b_i]$.

Definición 5.1.5. Sea $A = \{(a_i, a_j) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq i \leq j \leq n+1\}$. Definimos el **diagrama de persistencia** k -ésimo, denotado por $D_k(f)$, como el multiconjunto (A, m_k) , donde se define la multiplicidad $m_k : A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ como

$$m_k(i, j) = \begin{cases} \mu_k^{i,j} & \text{si } i \neq j \\ +\infty & \text{si } i = j \end{cases}$$

Para cada $S \subset \mathbb{R}^2$, denotaremos por $D(f) \cap S$ al multiconjunto $(A \cap S, m_k)$, es decir, restringimos nuestro diagrama a esa región del plano.

El siguiente resultado, conocido con el nombre de 'k-triangle lemma', nos dice que el diagrama de persistencia codifica toda la información de los grupos de homología. Usaremos como notación de ahora en adelante que $\mathcal{Q}_x^y = (-\infty, x] \times [y, +\infty) \subset \mathbb{R}^2$, es el cuadrante superior izquierdo con el punto (x, y) como vértice. A partir de aquí se considera fijado k , por lo que se omiten los subíndices correspondientes.

Lema 5.1.6. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sean $x < y$ valores reales. Entonces se cumple que $\#(D(f) \cap \mathcal{Q}_x^y) = \beta^{x,y}$.

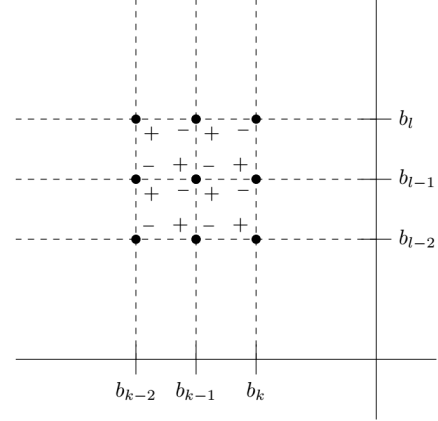


Figura 5.1: Representación gráfica de lo que ocurre al sumar multiplicidades.

Demostración. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad por el Lema 5.1.4, que $x = b_i$ y que $y = b_{j-1}$. Por definición, la multiplicidad del cuadrante superior izquierdo es:

$$\begin{aligned} \#(D(f) \cap \mathcal{Q}_x^y) &= \sum_{k \leq i \leq j \leq l} \mu^{k,l} = \sum_{k \leq i \leq j \leq l} \beta^{b_{k-1}, b_l} - \beta^{b_k, b_l} + \beta^{b_k, b_{l-1}} - \beta^{b_{k-1}, b_{l-1}} = \\ &= \beta^{b_{-1}, b_{n+1}} - \beta^{b_i, b_{n+1}} + \beta^{b_i, b_{j-1}} - \beta^{b_{-1}, b_{j-1}} \end{aligned}$$

En la primera y en la segunda igualdad no se están usando más que las definiciones correspondientes. Para ver que la tercera es correcta, veamos que

$$\mu^{k,l} + \mu^{k-1,l} + \mu^{k,l-1} + \mu^{k-1,l-1} = \begin{cases} +\beta^{k,l-1} - \beta^{k,l} - \beta^{k-1,l-1} + \beta^{k-1,l} \\ +\beta^{k-1,l-1} - \beta^{k-1,l} - \beta^{k-2,l-1} + \beta^{k-2,l} \\ +\beta^{k,l-2} - \beta^{k,l-1} - \beta^{k-1,l-2} + \beta^{k-1,l-1} \\ +\beta^{k-1,l-2} - \beta^{k-1,l-1} - \beta^{k-2,l-2} + \beta^{k-2,l-1} \end{cases}$$

Con sumar los términos de la derecha, se llega a

$$\mu^{k,l} + \mu^{k-1,l} + \mu^{k,l-1} + \mu^{k-1,l-1} = -\beta^{k,l} + \beta^{k-2,l} + \beta^{k,l-2} - \beta^{k-2,l-2} \quad (5.1)$$

Esta igualdad es lo que se representa en la Figura 5.1. Tan sólo queda decir que todos los sumandos de la Ecuación (5.1) son nulos salvo $\beta^{b_i, b_{j-1}}$, ya que estamos considerando $F_x^y = \{0\}$ si x o y son infinito lo que implica que $\beta^{x,y} = 0$ si uno de los dos es infinito. \square

Otra forma de codificar la información de los grupos de homología persistente es a través de su *código de barras*. Para poder construirlo, empezamos por un concepto más básico. Esta construcción está sacada de [11], el cual basa estas afirmaciones en [17].

Definición 5.1.7. Sea R un dominio de ideales principales. Un **módulo de persistencia** \mathbb{V} está formado por una familia de R -módulos $\{V_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ y una familia de homomorfismos $\varphi_a^b : V_a \rightarrow V_b$ para todo $a \leq b$. Debe cumplirse que $\varphi_b^c \circ \varphi_a^b = \varphi_a^c$, siempre que $a \leq b \leq c$; y φ_a^a debe ser la identidad en V_a . Un módulo de persistencia se dice de **tipo finito** si cada V_a es finitamente generado, como R -módulo.

Se puede probar que cada módulo de persistencia de tipo finito puede interpretarse de forma natural como un $R[t]$ -módulo graduado finitamente generado. Para nosotros es interesante cuando

R es un cuerpo, caso en el que usaremos F como notación. Tanto es así que algunos autores (por ejemplo [5] y [8]) definen el módulo de persistencia como una familia de F -espacios vectoriales. En nuestro caso, si nuestra filtración tiene como índice $I = \mathbb{R}$, tenemos que $\{H_k^i\}_{i \in \mathbb{R}}$ tiene estructura de módulo de persistencia, considerando como aplicaciones v_a^b los homomorfismos inducidos por la inclusión. Denotemos por \mathbb{V}_k a $\{H_k^i\}_{i \in \mathbb{R}}$, con los homomorfismos inducidos por la inclusión. Con esto, el teorema de clasificación de $F[t]$ -módulos graduados finitamente generados nos dice que existe una base en la que \mathbb{V}_k se escribe como

$$\left(\bigoplus_{\alpha=1}^n t^{i_\alpha} \cdot F[t] \right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta=n+1}^m t^{i_\beta} \frac{F[t]}{t^{j_\beta} \cdot F[t]} \right)$$

Es precisamente de esta base de donde vienen los códigos de barras, aún por definir. En el contexto en el que trabajamos, podemos asegurar que V_0 tendrá un generador en la parte libre y que V_k no tendrá ningún generador en la parte libre, para $k > 1$. Esto es por lo que se dijo de que para un ϵ lo bastante pequeño tenemos un espacio discreto y para un ϵ lo bastante grande tenemos un espacio contráctil. Traduciendo esto a los términos de elementos que nacen y mueren, es fácil intuir que estos generadores que aparecen en i_β y desaparecen en $i_\beta + j_\beta$ se corresponden con elementos de los grupos de homología que nacen en i_β y mueren en $i_\beta + j_\beta$. Tanto es así que se puede probar el siguiente teorema, como hacen en [17], aunque nosotros tan sólo le enunciaremos.

Teorema 5.1.8. *La dimensión de $H_k^{i,j}$ es igual a la cantidad de generadores i_α y j_β del módulo de persistencia que hay en el intervalo $[i, j]$.*

Esto nos da otra forma gráfica de visualizar cuándo muere y cuándo nace cada elemento. Además, este punto de vista permite desarrollar un algoritmo para calcular los grupos de homología persistente, ya que es equivalente a encontrar una base en la que se descomponga \mathbb{V}_k . Esto se trabaja en [17] y obtienen un algoritmo para cuando trabajamos con coeficientes en un cuerpo F .

Finalmente, un **código de barras** es una representación gráfica de los generadores de cada intervalo $[i, j]$. La figura 5.2, obtenida de [13], muestra de forma gráfica los grupos de homología persistente de un par de bases nitrogenadas. En ambos casos, la filtración viene dada de la siguiente forma: se toman los átomos de cada molécula como puntos y se forman los complejos de Čech para distintas distancias. La línea horizontal muestra la distancia que se está tomando para calcular el complejo de Čech, medida en ángstroms.

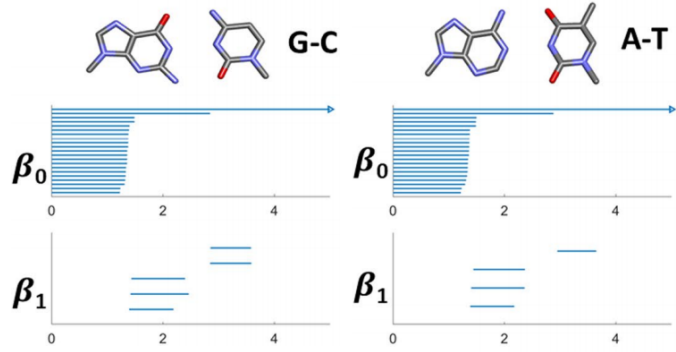


Figura 5.2: Códigos de barras asociados a pares de bases nitrogenadas.

5.2. Estabilidad

En esta sección vamos a estudiar hasta qué punto se conserva la homología persistente cuando la calculamos con respecto a dos funciones dóciles distintas $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Antes de enunciar el resultado principal, recordemos qué es la distancia Hausdorff. Sean A e B subconjuntos en R^N , definimos

$$d_H(A, B) := \max \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} \|x - y\|_\infty, \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} \|x - y\|_\infty \right\}$$

Veremos que se cumple la siguiente condición de tipo Lipschitz para la distancia Hausdorff entre los diagramas de persistencia construidos a partir de f y g :

$$d_H(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty \quad (5.2)$$

Nota 5.2.1. Esta condición podría refinarse y ver que

$$d_B(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty$$

donde d_B es la distancia 'bottleneck', la cual se define como

$$d_B(X, Y) = \inf_{\gamma} \sup_{x \in X} \|x - \gamma(x)\|_\infty$$

donde $\gamma : X \rightarrow Y$ es una biyección cualquiera.

Para probar la Ecuación (5.2) debemos refinar el 'k-triangle lemma' 5.1.6 a los llamados 'quadrant lemma' y 'box lemma'. Ahora enunciaremos y probaremos el primero.

Lema 5.2.2 (Quadrant lemma). *Sea $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones dóciles tales que $\epsilon = \|f - g\|_\infty$. Sean $b, c \in \mathbb{R}$, con $b < c$. Tenemos que $\#(D(f) \cap \mathcal{Q}_{b-\epsilon}^{c+\epsilon}) \leq \#(D(g) \cap \mathcal{Q}_b^c)$.*

Demostración. Toda la notación que se ha introducido previamente (F_x , f_x^y y F_x^y) se va a usar de forma análoga para g , basta cambiar cada f por g y cada F por G . Tenemos, por la definición de $\|\cdot\|_\infty$, que $f^{-1}(-\infty, x] \subseteq g^{-1}(-\infty, x + \epsilon]$, para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que podemos considerar el homomorfismo $\varphi_x : F_x \rightarrow G_{x+\epsilon}$ inducido por la inclusión. De forma análoga tenemos $\psi_x : G_x \rightarrow F_{x+\epsilon}$. Por ser $b < c$, tenemos los siguientes diagramas inducidos por las inclusiones entre los respectivos subespacios topológicos

$$\begin{array}{ccc} F_{b-\epsilon} & \xrightarrow{f_{b-\epsilon}^{c+\epsilon}} & F_{c+\epsilon} \\ \varphi_{b-\epsilon} \downarrow & & \uparrow \psi_c \\ G_b & \xrightarrow{g_b^c} & G_c \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F_{b+\epsilon} & \xrightarrow{f_{b+\epsilon}^{c+\epsilon}} & F_{c+\epsilon} \\ \psi_b \uparrow & & \uparrow \psi_c \\ G_b & \xrightarrow{g_b^c} & G_c \end{array}$$

Como las inclusiones conmutan entre sí, tenemos que estos diagramas también son conmutativos. En el primer diagrama tenemos que $f_{b-\epsilon}^{c+\epsilon} = \psi_c \circ g_b^c \circ \varphi_{b-\epsilon}$. Sea $\xi \in F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon}$, por definición tenemos que $\xi = f_{b-\epsilon}^{c+\epsilon}(\eta)$ para algún $\eta \in F_{b-\epsilon}$. Por la igualdad obtenida en el diagrama, tenemos que $\xi = \psi_c(\zeta)$ siendo $\zeta = g_b^c(\varphi_{b-\epsilon}(\eta)) \in G_b^c$. Se sigue que $F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon} \subseteq \text{im}(\psi_c|_{G_b^c})$. Por el segundo diagrama se tiene que $\psi_c(G_b^c) = \psi_c \circ g_b^c(G_b) = f_{b+\epsilon}^{c+\epsilon} \circ \psi_b(G_b) \subseteq F_{b+\epsilon}^{c+\epsilon}$. Tenemos la cadena de inclusiones:

$$F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon} \subseteq \psi_c(G_b^c) \subseteq F_{b+\epsilon}^{c+\epsilon} \quad (5.3)$$

La primera inclusión implica que $\dim(F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon}) \leq \dim(G_b^c)$. Si aplicamos el Lema 5.1.6 a esta desigualdad, tenemos lo que queríamos. \square

Este 'quadrant lemma' ya nos da información relevante que usaremos para probar el teorema de inferencia de homología persistente. Sin embargo, no es suficiente para probar la ecuación (5.2), para lo cual necesitamos el 'box lemma'. Antes de enunciarlo y probarlo, resulta conveniente establecer una relación entre rectángulos en \mathbb{R}^2 y espacios vectoriales, la cual viene dada por $D(f)$. Sea $A \subset \mathbb{R}^2$, consideraremos que A es un F -espacio vectorial de dimensión $A \cap D(f)$.

Sean $w < x < y < z$ cuatro números reales, todos distintos de los puntos críticos homológicos de $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Recordemos que la dimensión del grupo de homología F_x es por el Lema 5.1.6 la multiplicidad del cuadrante superior izquierdo con (x, x) como vértice, sin contar el vértice. De la misma forma, la dimensión del grupo de homología persistente F_x^y es la multiplicidad del cuadrante superior izquierdo con (x, y) como vértice. Si restringimos $f_y^z : F_y \rightarrow F_z$ al espacio F_x^y nos da $f_x^{y,z} : F_x^y \rightarrow F_x^z$, que es sobreyectiva por construcción. Denotemos por $F_x^{y,z} = \ker(f_x^{y,z})$. Es claro que $\dim F_x^{y,z} = \dim F_x^y - \dim F_x^z$.

Notemos que $F_w^y \subset F_x^y$ porque todo elemento de F_w^y es imagen de algún $\xi \in F_w$ por f_w^y , por lo que también es la imagen de $f_w^x(\xi)$ a través de f_x^y . Por tanto, podemos considerar la aplicación $f_w^{y,z}$ como la restricción de $f_x^{y,z} : F_x^y \rightarrow F_x^z$ a F_w^y . Es claro que el núcleo de $f_w^{y,z}$, denotado por $F_w^{y,z}$, está contenido en $F_z^{y,z}$. Podemos considerar entonces el cociente $F_{w,x}^{y,z} = F_x^{y,z} / F_w^{y,z}$. Como estamos trabajando con espacios vectoriales, podemos asegurar que $\dim F_{w,x}^{y,z} = \dim F_x^{y,z} - \dim F_w^{y,z}$.

Sean $a < b < c < d$, denotamos por $R = [a, b] \times [c, d]$, que no es más que el rectángulo con (a, c) , (a, d) , (b, c) , (b, d) como vértices; y por $R_\epsilon = [a + \epsilon, b - \epsilon] \times [c + \epsilon, d - \epsilon]$, el rectángulo obtenido al encoger R .

Lema 5.2.3 (Box lemma). $\#(D(f) \cap R_\epsilon) \leq \#(D(g) \cap R)$.

Demostración. Supondremos que ni a, b, c, d ni $a+\epsilon, b-\epsilon, c+\epsilon, d-\epsilon$ son puntos críticos homológicos de f . También asumiremos que $a+\epsilon < b-\epsilon$ y que $c+\epsilon < d-\epsilon$, ya que si no estaríamos trabajando en un caso degenerado que no aporta nada. Atacaremos esta desigualdad interpretando la multiplicidad del diagrama de persistencia dentro de cada caja como la dimensión de un espacio vectorial, como se ha explicado previamente. Recordemos que $\dim F_{a+\epsilon, b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon} = \#(D(f) \cap R_\epsilon)$ y $\dim G_{a,b}^{c,d} = \#(D(g) \cap R)$.

Para probar la desigualdad nos serviremos del siguiente diagrama conmutativo, cuyos elementos iremos definiendo poco a poco.

$$\begin{array}{ccc}
 G_a^d & \xrightarrow{r_1} & G_b^d \\
 \uparrow u_1 & & \uparrow u_4 \\
 & F_{a+\epsilon}^{d-\epsilon} \xrightarrow{r_2} F_{b-\epsilon}^{d-\epsilon} & \\
 & \uparrow u_2 \quad \uparrow u_3 & \\
 & F_{a+\epsilon}^{c+\epsilon} \xrightarrow{r_3} F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon} & \\
 & \uparrow s_2 \quad \downarrow s_3 & \\
 E_a^c & \xrightarrow{r_4} & E_b^c
 \end{array}$$

Aquí $u_2 = f_{a+\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon}$ y $u_3 = f_{b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon}$. Los conjuntos E_a^c y E_b^c son subespacios de G_a^c y G_b^c , respectivamente. Concretemos quiénes son estos subespacios. Consideramos $\psi_c|_{G_b^c}$, la restricción de ψ_c a G_b^c , definimos

$$E_b^c = (\psi_c|_{G_b^c})^{-1}(\ker(u_3)) = (\psi_c|_{G_b^c})^{-1}(F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon})$$

Nótese que, por lo visto en la demostración del quadrant lemma 5.2.2, la imagen de G_b^c a través de ψ_c contiene a $F_{b-\epsilon}^{c+\epsilon}$, así que $\ker(u_3) = \text{im}(\psi_c|_{E_b^c})$. Definimos $s_3 = \psi_c|_{E_b^c}$. Consideramos $E_a^c = G_a^c \cap E_b^c$. Veremos más adelante que E_b^c/E_a^c es un subespacio de $G_{a,b}^{c,d}$ a partir del cual podemos construir un homomorfismo sobreyectivo con imagen en $F_{a+\epsilon, b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon}$. Sigamos con la descripción del diagrama, las aplicaciones r_1, r_2, r_3, r_4 no son más que las inclusiones naturalmente definidas; u_1 es la restricción de $g_a^{c,d}$ a E_a^c y u_4 es la restricción de $g_b^{c,d}$ a E_b^c . La aplicación s_2 es la restricción de ψ_c a E_a^c , está bien definido el que la imagen de s_2 esté en $F_{a+\epsilon}^{c+\epsilon}$ porque en la demostración del 'quadrant lemma' vimos que $\psi_c(G_a^c) \subseteq F_{a+\epsilon}^{c+\epsilon}$, así que sigue siendo cierta la afirmación al restringir la aplicación a un subespacio. Para terminar, s_1 es la restricción de $\varphi_{d-\epsilon}$ a $F_{b-\epsilon}^{d-\epsilon}$ y como vimos que $\varphi_{d-\epsilon}(F_{b-\epsilon}^{d-\epsilon}) \subseteq G_b^d$ (intercambiando F y G), tenemos que la imagen de s_1 está en G_b^d . Con todo esto, el diagrama está bien construido y es claro que conmuta.

Por el diagrama, $u_4 = s_1 \circ u_3 \circ s_3$, lo cual implica que $E_b^c = \ker(u_4)$ por ser $u_3 \circ s_3$ el homomorfismo trivial, por construcción. De la misma forma, $r_1 \circ u_1 = u_4 \circ r_4$, lo que implica que $E_a^c = \ker(u_1)$ porque $u_4 \circ r_4$ es nula y r_1 es inyectiva (por ser una inclusión). Aunque parezca que estamos usando una notación redundante, vamos a cambiar el nombre a los subespacios $E_b^c = E_b^{c,d} \subseteq G_b^{c,d}$ y $E_a^c = E_a^{c,d} \subseteq G_a^{c,d}$. Como $E_a^{c,d} = E_b^{c,d} \cap G_a^{c,d}$, el cociente $E_{a,b}^{c,d} = E_b^{c,d}/E_a^{c,d}$ puede interpretarse como el conjunto de clases de equivalencia de elementos en $E_b^{c,d} \subseteq G_b^{c,d}$ módulo $G_a^{c,d}$; por lo que $E_{a,b}^{c,d} \subseteq G_{a,b}^{c,d}$. Por tanto, $\dim E_{a,b}^{c,d} \leq \dim G_{a,b}^{c,d}$.

Recordemos que $E_{a,b}^{c,d} = \ker(u_4)/\ker(u_1)$ y $F_{a+\epsilon, b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon} = \ker(u_3)/\ker(u_2)$. Por construcción, tenemos que $s_3(\ker(u_4)) = \ker(u_3)$. Para ver que s_3 induce un homomorfismo sobreyectivo entre los cocientes, queda comprobar que $s_3(\ker(u_1)) = s_2(\ker(u_1))$ está contenido en $\ker(u_2)$. Esto no es difícil ya que $r_2 \circ u_2 \circ s_2(\xi) = u_3 \circ s_3 \circ r_4(\xi) = 0$, para todo $\xi \in \ker(u_1)$ y, como r_2 es inyectiva por ser una inclusión, tenemos que $s_2(\ker(u_1)) \subseteq \ker(u_2)$. Con esto, podemos considerar $F_{a+\epsilon, b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon} \subseteq E_{a,b}^{c,d}$ y como consecuencia $\dim F_{a+\epsilon, b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon} \leq \dim E_{a,b}^{c,d}$. Juntando todo a lo que hemos llegado, tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\#(D(f) \cap R_\epsilon) = \dim F_{a+\epsilon, b-\epsilon}^{c+\epsilon, d-\epsilon} \leq \dim E_{a,b}^{c,d} \leq \dim G_{a,b}^{c,d} = \#(D(g) \cap R) \quad \square$$

Con este resultado ya podemos enunciar y probar la Ecuación 5.2.

Teorema 5.2.4. *Sea X un espacio topológico y sean $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas dóciles. Se cumple que*

$$d_H(D(f), D(g)) \leq \|f - g\|_\infty$$

Demostración. Sea $(x, y) \in D(f)$, consideramos $a = x = b$ y $c = y = d$, por lo que $R = \{x\} \times \{y\}$ y $R_\epsilon = [x - \epsilon, x + \epsilon] \times [y - \epsilon, y + \epsilon]$. El 'box lemma' 5.2.3 nos garantiza que $\sharp(D(f) \cap R_\epsilon) \leq \sharp(D(g) \cap R)$ y por hipótesis $\sharp(D(f) \cap R_\epsilon) \geq 1$, por lo que $\sharp(D(g) \cap R) \geq 1$ y con eso tenemos que debe haber al menos un punto $(x', y') \in D(g)$ tal que $\|(x, y) - (x', y')\|_\infty < \epsilon$. \square

5.3. Aplicaciones

Una de las aplicaciones de la homología persistente es la de calcular los grupos de homología de un subconjunto X de un espacio métrico M del que tan sólo tenemos una muestra de puntos P . Llegados a este punto del trabajo, es fácil intuir que la forma de hacerlo es tomando como filtración de X la dada por los complejos de Čech $\mathcal{C}_\epsilon(P)$ para distintos valores de ϵ . El siguiente teorema nos garantiza que este procedimiento, bajo ciertas condiciones sobre X y P , es válido.

Sea $X \subset M$ un conjunto cerrado. Definimos $d_X : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $d_X(y) = \min_{x \in X} \|x - y\|$. Al menor punto crítico homológico de esta función d_X se le denomina 'homological feature size' de X y se le denota por $\text{hfs}(X)$. Supongamos que tenemos otro conjunto $P \subset M$, que será nuestra muestra de puntos que aproxima X . La notación que usaremos será la siguiente: para $x < y$ denotaremos por X_x^y y por P_x^y los grupos de homología persistente dados por d_X y por d_P , respectivamente.

Teorema 5.3.1. *Para todo $\epsilon > 0$ tal que $d_H(X, P) < \epsilon < \frac{1}{4} \text{hfs}(X)$, las dimensiones de cada grupo de homología de X y $P_\epsilon^{3\epsilon}$ son infinitas ambas o finitas e iguales.*

Demostración. Nótese que $\|d_X - d_P\|_\infty = d_H(X, P)$, por la definición de distancia Hausdorff. Entonces, $\|d_X - d_P\|_\infty < \epsilon$. Podemos usar la primera desigualdad de la Ecuación 5.3, ya que para probar esa cadena de desigualdades en ningún momento se usa que f y g sean dóciles. Usando dos veces esta desigualdad, intercambiando los papeles de X y P en la primera desigualdad de 5.3 cuando se aplica por segunda vez, se obtiene que

$$\dim(X_0^{4\epsilon}) \leq \dim(P_\epsilon^{3\epsilon}) \leq \dim(X_{2\epsilon}^{2\epsilon})$$

Como $4\epsilon < \text{hfs}(X)$, el intervalo $[0, 4\epsilon]$ no contiene ningún punto crítico. El Lema 5.1.4 nos dice que $d_{X_0^{4\epsilon}}$ y $d_{X_{2\epsilon}^{2\epsilon}}$ son isomorfismos, por lo que $X_0^{4\epsilon} \cong H_k(X) \cong X_{2\epsilon}^{2\epsilon}$ y con eso es claro que la cadena de desigualdades previa es en realidad una cadena de igualdades. \square

Es decir, que si tenemos un conjunto de puntos P con $d_H(X, P) < \frac{1}{4} \text{hfs}(X)$, si tomamos un $\epsilon > 0$ tal que $d_H(X, P) < \epsilon < \frac{1}{4} \text{hfs}(X)$, calculamos $\mathcal{C}_\epsilon(P)$ y $\mathcal{C}_{3\epsilon}(P)$; resulta que el grupo de homología persistente k -ésimo resultante de la inclusión $\eta : \mathcal{C}_\epsilon(P) \rightarrow \mathcal{C}_{3\epsilon}(P)$ tiene la misma dimensión que el grupo de homología k -ésimo de X . Esto nos dice que los grupos de homología persistente son estables bajo pequeñas perturbaciones de nuestra muestra de puntos.

A la hora de usar la homología persistente en otros ámbitos, uno necesita resultados más generales. Una línea teórica que ha dado buenos resultados ha sido la de adaptar la homología persistente a la teoría de categorías (por ejemplo [5] y [8]) y la de introducir un peso para modificar la función d_X (por ejemplo [4]), en esto último juega un papel importante la teoría de la medida. Con este desarrollo teórico se ha adaptado este método para, por ejemplo, analizar propiedades físicas, químicas y biológicas del ADN [13]. Como se cita en ese mismo artículo, también se han conseguido resultados en análisis de imágenes, reconocimiento de formas, análisis de datos y visión artificial.

En definitiva, la homología persistente es un ejemplo más de que el estudio de las matemáticas más puras y abstractas tiene aplicaciones sorprendentes en problemas prácticos, que en ocasiones son de naturaleza radicalmente distinta a lo que en un principio motivó dicho estudio.

Bibliografía

- [1] Sivaraman Balakrishnan, Alesandro Rinaldo, Don Sheehy, Aarti Singh, and Larry Wasserman. Minimax rates for homology inference. In *Artificial Intelligence and Statistics*, pages 64–72, 2012.
- [2] Gérard Biau, Frédéric Chazal, David Cohen-Steiner, Luc Devroye, Carlos Rodriguez, et al. A weighted k-nearest neighbor density estimate for geometric inference. *Electronic Journal of Statistics*, 5:204–237, 2011.
- [3] Karol Borsuk. On the imbedding of systems of compacta in simplicial complexes. *Fundamenta Mathematicae*, 35(1):217–234, 1948.
- [4] Mickaël Buchet, Frédéric Chazal, Steve Y Oudot, and Donald R Sheehy. Efficient and robust persistent homology for measures. *Computational Geometry*, 58:70–96, 2016.
- [5] Frédéric Chazal, Vin De Silva, Marc Glisse, and Steve Oudot. *The structure and stability of persistence modules*. Springer, 2016.
- [6] Jia Lin Chen. Universal coefficient theorem for homology. VIGRE REU participant paper, University of Chicago, 2009.
- [7] David Cohen-Steiner, Herbert Edelsbrunner, and John Harer. Stability of persistence diagrams. *Discrete & Computational Geometry*, 37(1):103–120, 2007.
- [8] William Crawley-Boevey. Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules. *Journal of Algebra and its Applications*, 14(05):1550066, 2015.
- [9] Vin De Silva and Robert Ghrist. Coverage in sensor networks via persistent homology. *Algebraic & Geometric Topology*, 7(1):339–358, 2007.
- [10] Herbert Edelsbrunner, David Letscher, and Afra Zomorodian. Topological persistence and simplification. *Discrete Comput Geom*, 28:511–533, 2002.
- [11] Robert Ghrist. Barcodes: the persistent topology of data. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 45(1):61–75, 2008.
- [12] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.
- [13] Zhenyu Meng, D Vijay Anand, Yunpeng Lu, Jie Wu, and Keli Xia. Weighted persistent homology for biomolecular data analysis. *Scientific reports*, 10(1):1–15, 2020.
- [14] John Willard Milnor, Michael Spivak, and Robert Wells. *Morse theory*, volume 1. Princeton university press Princeton, 1969.
- [15] James R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Addison-Wesley Publishing Company, 1984.
- [16] Partha Niyogi, Stephen Smale, and Shmuel Weinberger. A topological view of unsupervised learning from noisy data. *SIAM Journal on Computing*, 40(3):646–663, 2011.
- [17] Afra Zomorodian and Gunnar Carlsson. Computing persistent homology. *Discrete & Computational Geometry*, 33(2):249–274, 2005.